



БАЛТИЙСКИЙ  
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ  
И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ  
В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ТЕХНОЛОГИЙ**

**Выпуск 3**

Калининград  
2024

БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. ИММАНУИЛА КАНТА

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ  
В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Сборник научных трудов

Выпуск 3

*Под редакцией А. Д. Быковой*

Калининград

Издательство Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта

2024

УДК 004  
ББК 22  
Ф947

*Рецензенты*

*М. Ю. Овчинников*, д-р физ.-мат. наук, проф., ИПМ им. М. В. Келдыша РАН;  
*А. Е. Кобелянский*, канд. техн. наук, зам. начальника,  
ООО «Газпром трансгаз Санкт-Петербург»; *А. А. Шпиловой*, канд. физ.-мат. наук,  
доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта;  
*А. В. Юров*, д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет  
им. И. Канта; *С. В. Нестеров*, канд. физ.-мат. наук, нач. службы АСУ  
«ООО Газпром трансгаз Санкт-Петербург»;  
*В. М. Краев*, д-р техн. наук, проф., «Московский авиационный институт (НИУ)»;  
*А. А. Юрова*, канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский Федеральный университет  
им. И. Канта; *Е. В. Волхонская*, д-р техн. наук, проф., проф., Калининградский  
государственный технический университет

**Ф947** **Фундаментальные и прикладные исследования в области высоких технологий** : сб. науч. тр. / под ред. А. Д. Быковой. — Калининград : Издательство БФУ им. И. Канта, 2024. — Вып. 3. — 123 с.  
ISBN 978-5-9971-0933-2

Включает теоретические и прикладные исследования магистров, аспирантов, молодых ученых, преподавателей и специалистов в области высоких технологий. Охватывает широкий круг вопросов, касающихся информатики, информационных систем, математического моделирования, приборостроения, программирования, радиофизики и телекоммуникаций.

Адресован широкому кругу специалистов в сфере высоких технологий, аспирантам и студентам высших учебных заведений.

УДК 004  
ББК 22

ISBN 978-5-9971-0933-2

© БФУ им. И. Канта, 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Кочина А. С., Протасевич М. Н.</i> Об одной модификации модели бруссе- лятора .....	4
<i>Захаров А. И., Сейтумерова Э. Л., Шпилевая С. Г.</i> Мультисервисная корпо- ративная сеть предприятия .....	12
<i>Пониматкин В. Е., Шпилевая С. Г., Гоглев В. А., Ерин Г. К.</i> Малогабаритная приемо-передающая антенная система .....	21
<i>Мохова А. А., Бурмистров В. И., Ляхов Г. Г.</i> Проектирование сети мобиль- ной связи для части Ленинградского района города Калининграда .....	32
<i>Трунин А. С., Юров А. В.</i> Преобразование Дарбу и Шлезингера для матрич- ного нелинейного уравнения Шрёдингера .....	43
<i>Абраменков Г. В., Дронов П. А., Приданников С. Ю., Нестеренко А. Н., Тол- стель О. В., Ахметов Д. Б., Васильев Д. С., Степанова Е. С.</i> Электроракет- ные двигательные установки с тягой от 4 до 18 мН для малых космических аппаратов .....	51
<i>Обноскина А. В., Юров А. В.</i> Двумерные преобразования Дарбу: итерации и расширенная суперсимметрия .....	65
<i>Максютов А. Р., Чириков Р. В., Юрова А. А.</i> Метод двумерной фактори- зации .....	79
<i>Абраменков Г. В., Дронов П. А., Приданников С. Ю., Нестеренко А. Н., Пярых И. Н., Толстель О. В., Попова Ю. В., Кострина А. А., Шилов Н. Р.</i> Некоторые примеры использования электроракетных двигательных уста- новок с тягой от 390 до 1000 мН .....	88
<i>Персичкин А. А., Персичкин В. А., Шпилевой А. А.</i> О возможности синте- за канала передачи информации в ПЭМИН видеоинтерфейсов изменени- ем частоты кадровой развертки .....	105
<i>Савченко М. П.</i> Энергетический расчет спутниковой линии связи при бо- ковом приеме .....	112

А. С. Кочина, М. Н. Протасевич

## ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МОДЕЛИ БРЮССЕЛЯТОРА

*Описаны предпосылки возникновения теории автоколебательных систем в той ее части, которая берет свое начало при рассмотрении различных химических процессов. Изложена история появления первых таких моделей. Представлены основные характеристики классической модели брюсселятора и рассмотрен набор условий, с помощью которых можно ввести модификацию данной модели. Далее проведен анализ полученной модели и установлены качественные типы поведения динамической системы, совместимые с фундаментальными законами биологической и химической кинетики. Исследование проводится как аналитическими средствами, так и с использованием численных методов. Сначала применяется кинетический закон действующих масс для составления дифференциальных уравнений, затем проводятся обезразмеривание системы, позволяющее уменьшить число параметров, и дальнейшая линеаризация для анализа на устойчивость точек покоя. Возникающее на этапе нахождения стационарных решений кубическое уравнение с параметрами решается численно с применением системы компьютерной алгебры Maple. Далее при варьировании в широком диапазоне параметров системы производится анализ получаемых решений и строятся фазовые портреты, отражающие принципиально разные случаи поведения траекторий модифицированного брюсселятора. Результатом исследования являются выводы о зависимости поведения интегральных кривых от параметров изучаемой динамической системы.*

*The presented work describes the prerequisites for the emergence of the self-oscillatory systems theory in the part that originates from the consideration of various chemical processes. The history of the appearance of the first such models is outlined. The main characteristics of the classical Brusselator model are outlined and a set of conditions with the help of which a modification of this model can be introduced is considered. Next, the obtained model was analyzed and qualitative types of behavior of the dynamic system, compatible with the fundamental laws of biological and chemical kinetics, were established. The research is carried out both analytically and with numerical methods. First, the kinetic law of mass action is applied to compose differential equations, then the system is being non-dimensionalized, allowing to reduce the number of parameters, and further linearized to analyze the stability of stationary points. The parametric cubic equation arises and is being solved numerically using the Maple computer algebra system. Further, when varying the system parameters over a wide range, the resulting solutions are analyzed and phase portraits are constructed, reflecting fundamentally different cases of behavior of the trajectories of the*

*modified Brusselator. The result of the study leads to the conclusions about the dependence of the behavior of integral curves on the parameters of the dynamic system being studied.*

**Ключевые слова:** брюсселятор, диссипативная система, реакция Белоусова — Жаботинского, дифференциальные уравнения, динамическая система, колебательные системы, автокатализ

**Keywords:** Brusselator, dissipative systems, Belousov — Zhabotinsky reaction, differential equations, dynamic systems, oscillation systems, autocatalysis

В 1951 году Борис Павлович Белоусов проводил эксперимент по воссозданию аналога цикла Кребса — метаболического процесса, возникающего в живой клетке при аэробной фазе дыхания. В процессе смешения лимонной кислоты с ионами бромата в растворе соляной кислоты с добавлением сульфата церия как катализатора было замечено многократное изменение цвета смеси, а именно с желтого на белый и обратно. Каждый цикл смены окраски раствора продолжался около 80 секунд, пока примерно через час в системе не достигалось окончательное равновесие [2].

В начале 1960-х годов эта реакция была подробно проанализирована Анатолием Марковичем Жаботинским [8, с. 156], полностью раскрыт ее механизм и описана химическая кинетика процесса [6]. Были выявлены условия возникновения колебательных режимов и представлено их теоретическое обоснование. После обнародования исследования за данной реакцией закрепилось наименование «реакция Белоусова — Жаботинского», она стала «базовой моделью для исследования процессов самоорганизации, включая образование неоднородных по пространству распределений концентраций реагирующих веществ» [10, с. 347].

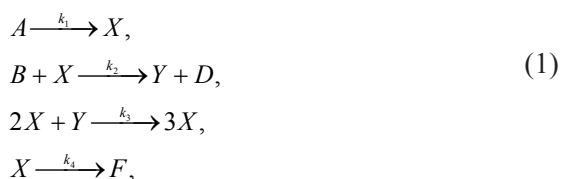
Первая математическая модель, разумная с точки зрения химии и описывающая автоколебания концентраций веществ в реакторе, была предложена А. М. Жаботинским и Б. П. Корзухиным и получила название в их честь [5, с. 52]. После этого в 1968 году Илья Романович Пригожин совместно с Рене Лефевром разработали другую подобную модель, которая получила название «брюсселятор» в честь города, в котором проводились исследования.

Брюсселятор является классическим примером автоколебательного поведения переменных (концентраций) в исследовании кинетики химических реакций. Особую роль брюсселятору придает тот факт, что он стал одной из первых математических моделей такого рода. Дело в том, что колебательные, а также периодические и квазипериодические стационарные процессы повсеместно возникают во многих научных отраслях в ходе инженерно-технической и изобретательской деятельности. Наблюдаемые при этом флуктуации величин требуется анализировать и корректно интерпретировать для создания математической модели. Это, в свою очередь, необходимо для последующей разработки программных продуктов, новых приборов, установок и механизмов.

Кроме того, модель брюсселятора отражает общие черты многих систем, где возникают пространственно-временные структуры и возможны явления самоорганизации. Одним из необходимых условий возникнове-

ния автоколебаний считают наличие диссипативности, или открытости, системы и необратимость всех реакций [1]. Первое требование при этом означает возможность системы обмениваться с окружающей средой веществом и (или) энергией. Еще одним условием является согласованность макроскопических процессов и изучение процессов такого типа, что для их описания необходимы нелинейные математические модели [9, с. 4—5].

Классическая модель брюсселятора описывает происходящее в некотором химическом реакторе взаимодействие реагентов, протекающее по схеме



где  $A$  и  $B$  — исходные вещества (субстраты),  $D$  и  $F$  — конечные вещества (продукты),  $X$  и  $Y$  — промежуточные вещества,  $k_1, k_2, k_3, k_4$  — скорости соответствующих реакций.

Строго говоря, реакции в данной системе могут идти как в прямом, так и в обратном направлении, но скорости обратных принимаются столь малыми, что протекание всех химических реакций рассматривается только в прямом направлении.

Открытость системы позволяет удерживать ее вдали от состояния термодинамического равновесия, а нелинейность системы, задаваемая третьей реакцией в (1), приводит, как было отмечено И. Пригожиным, к возникновению колебаний в системе [7]. Им было обнаружено, что в химических реакторах для двухстадийных реакций, протекающих с образованием двух интерстициональных продуктов, невозможно возникновение колебаний в случаях реакций первого и второго порядков, то есть при моно- и бимолекулярных взаимодействиях [1].

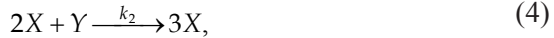
Итак, при рассмотрении модифицированной модели будем руководствоваться следующими предположениями:

1. В связи с требованием открытости системы изучим случай, когда вещество  $A$  (субстрат) поглощается из окружающей среды и возникает активное вещество  $X$  лимитирующей реакции  $A \xrightarrow{k_1} X$ . Таким же образом можно ввести стоки  $X \xrightarrow{k_3} E, Y \xrightarrow{k_4} F$  ( $E$  и  $F$  — продукты).

2. При модификации оставляем тримолекулярную стадию, в которой одновременно отсутствует рецикл одного из компонентов, что позволяет возникать колебаниям.

Оказывается возможным модифицировать модель брюсселятора, убирая из схемы некоторые реакции, включая при этом в систему поступающие и выводимые потоки веществ. Предположим, имеется поток молекул некоторого вещества  $X$  в зону реакции ( $J \rightarrow X$  вместо  $A \rightarrow X$ ). Пусть эти молекулы вещества  $X$  могут преобразовываться в молекулы вещества  $Y$  (реакция  $B + X \xrightarrow{k_2} Y + D$  заменяется на  $X \xrightarrow{k_1} Y$ ). Реакцию третьего порядка мы оставляем без изменений. Она является автокаталитической и служит основой брюсселятора. Здесь автокатализ заключается в увели-

чении в процессе реакции количества вещества  $X$ , что в дальнейшем, по закону действующих масс, ведет к росту скорости химической реакции. Таким образом, вещество  $X$  здесь выступает активатором. Далее предположим, что в системе происходит разложение молекул вещества  $X$  и удаление из реактора веществ  $X$  и  $Y$  (то есть будем считать, что  $X$  в итоге превращается в некий конечный продукт  $E$ ,  $Y$  — в продукт  $F$ ). Схема принимает следующий вид:



Как и в случае классического брюсселятора, реакции (2) и (5) являются мономолекулярными и соответствуют накачке вещества  $X$  и его распаду (см.: [3]).

Запишем систему дифференциальных уравнений для предложенной схемы протекания реакций. Для этого воспользуемся уже упомянутым законом действующих масс, который является основным постулатом химической кинетики (см.: [4, с. 7—10]). Этот закон утверждает, что скорость реакции (то есть скорость образования вещества) пропорциональна:

- 1) концентрации реагирующих молекул;
- 2) вероятности встретиться молекулам реагентов;
- 3) вероятности столкнувшимся молекулам вступить во взаимодействие.

Если в результате реакции количество вещества уменьшается, то в уравнении, описывающем динамику изменения данного вещества, ставится знак «минус», в противном случае — «плюс».

Положительный прирост вещества  $X$  происходит за счет привнесимого в систему потока частиц в (2) и вследствие образования вещества в (4), но уменьшается из-за превращения в  $Y$  в (3) и взаимодействия с  $Y$  в (4).

Увеличение количества вещества  $Y$  наблюдается в мономолекулярной реакции (2), а уменьшение — в реакции с  $X$  в (4) и при образовании конечного продукта в (6).

Таким образом, можно записать:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = J - k_1 X + k_2 X^2 Y - k_3 X, \\ \frac{dY}{dt} = k_1 X - k_2 X^2 Y - k_4 Y. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь концентрации веществ  $J$ ,  $X$  и  $Y$  обозначены соответствующими буквами, а все значения параметров являются положительными числами. Для удобства исследования данной системы и уменьшения числа параметров следует обезразмерить ее. Избавимся от размерности единицы времени, приняв  $t = \frac{t'}{k_4}$ , и возьмем за единицу концентрации  $jk_4^{-1}$ , то есть проведем следующую замену переменных:

$$t = \frac{t'}{k_4},$$

$$X = \frac{J}{k_4} x,$$

$$Y = \frac{J}{k_4} y.$$

Для первого уравнения последовательно получаем:

$$\frac{d\left(\frac{J}{k_4} x\right)}{d\frac{t'}{k_4}} = J - k_1\left(\frac{J}{k_4} x\right) + k_2\left(\frac{J}{k_4} x\right)^2\left(\frac{J}{k_4} y\right) - k_3\left(\frac{J}{k_4} x\right),$$

$$J \frac{dx}{dt'} = J - \frac{k_1 J}{k_4} x + \frac{k_2 J^3}{k_4^3} x^2 y - \frac{k_3 J}{k_4} x,$$

$$\frac{dx}{dt'} = 1 - \frac{k_1 + k_3}{k_4} x + \frac{k_2 J^2}{k_4^3} x^2 y.$$

Для второго уравнения из (7) последовательно получаем:

$$\frac{d\left(\frac{J}{k_4} y\right)}{d\frac{t'}{k_4}} = k_1\left(\frac{J}{k_4} x\right) - k_2\left(\frac{J}{k_4} x\right)^2\left(\frac{J}{k_4} y\right) - k_4\left(\frac{J}{k_4} y\right),$$

$$J \frac{dy}{dt'} = \frac{k_1 J}{k_4} x - \frac{k_2 J^3}{k_4^3} x^2 y - J y,$$

$$\frac{dy}{dt'} = \frac{k_1}{k_4} x + \frac{k_2 J^2}{k_4^3} x^2 y - y.$$

Вводя обозначения

$$a = \frac{k_1 + k_3}{k_4}, \quad b = \frac{k_2}{k_4^3} J^2, \quad c = \frac{k_1}{k_4},$$

приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - ax + bx^2 y, \\ \dot{y} = cx - bx^2 y - y, \end{cases} \quad (8)$$

где производные по  $t'$  мы обозначили  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ .

Найдем точки покоя системы (8), приравняв к нулю правые части системы:

$$\begin{cases} 1 - ax + bx^2 y = 0, \\ cx - bx^2 y - y = 0. \end{cases}$$

Исключая, например, неизвестное  $y$ , приходим к кубическому относительно  $x$  уравнению

$$b(c - a)x^3 + bx^2 - ax + 1 = 0.$$

В связи с наличием трех параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  аналитическое решение этого кубического уравнения оказывается достаточно затруднительным, поэтому целесообразным представляется применение системы компьютерной алгебры Maple для численного нахождения положений равновесия и построения фазовых траекторий.

При численном моделировании было выявлено три принципиально разных поведения решений системы (8):

- 1) монотонное: концентрации обоих веществ периодически приближаются к стационарным значениям;
- 2) возникновение колебаний, близких к периодическим;
- 3) появление затухающих колебаний.

Установление колебательного режима в системе можно проиллюстрировать для различного набора параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Например при  $a = 25$ ,  $b = 350$ ,  $c = 20$  фазовый портрет будет иметь вид, изображенный на рисунке 1.

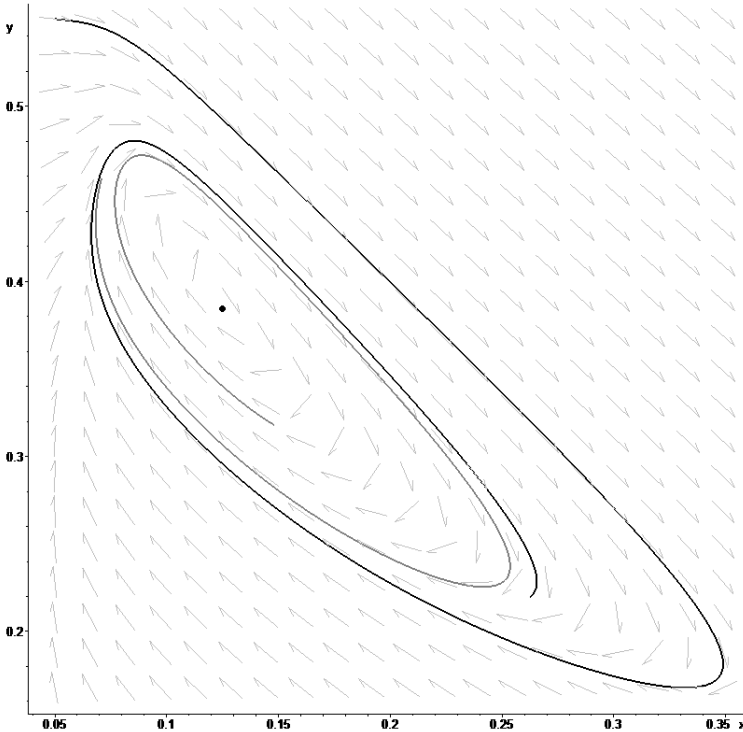


Рис. 1. Фазовый портрет системы (8) при  $a = 25$ ,  $b = 350$ ,  $c = 20$

При  $a = 250$ ,  $b = 20\,000$ ,  $c = 210$  (рис. 2) также наблюдается колебательный режим, при котором колебания происходят с малой амплитудой и высокой частотой.

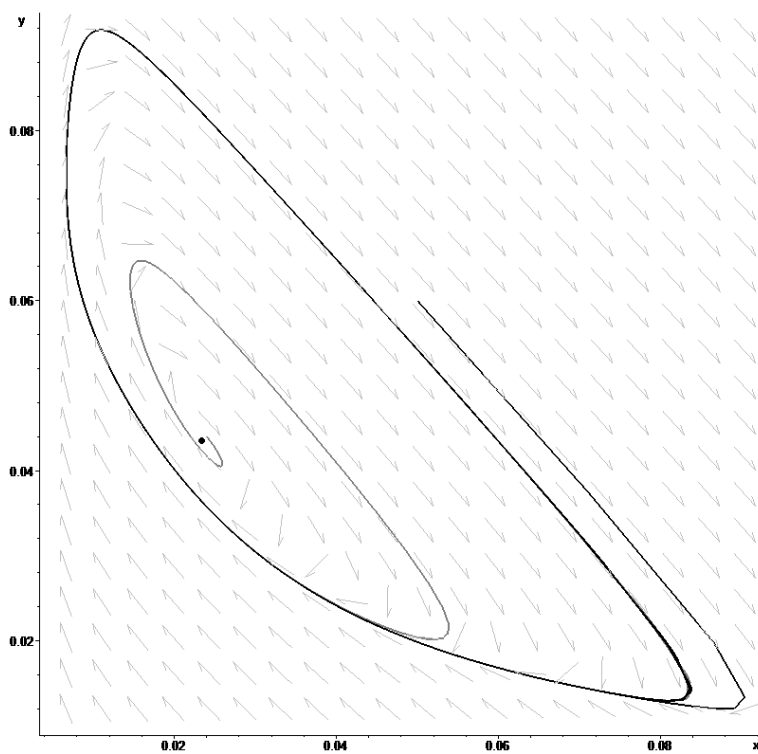


Рис. 2. Фазовый портрет системы (8) при  $a = 250$ ,  $b = 20\,000$ ,  $c = 210$

Особым результатом численного исследования модели (8) стало установление того факта, что в пространстве параметров  $(a, b, c)$  область существования колебательного режима имеет вид расширяющегося в направлении положительного направления оси  $b$  конуса, то есть при увеличении параметра  $b$  колебательный режим наблюдается для все большего диапазона значений параметров  $a$  и  $c$ .

#### Список литературы

1. *Glansdorff P., Prigogine I.* Thermodynamic Theory of Structure, Stability, and Fluctuations. L., 1971.
2. *Белоусов Б. П.* Периодически действующая реакция и ее механизм // Сборник рефератов по радиационной медицине. 1958. М., 1959. С. 145—147.
3. *Ванаг В. К.* Диссипативные структуры в реакционно-диффузионных системах. М.; Ижевск, 2008.
4. *Галимова М. Х.* Ферментативная кинетика : справочник по механизмам реакций. М., 2007. С. 7—10.
5. *Корзунин М. Д., Жаботинский А. М.* Математическое моделирование химических и экологических автоколебательных систем // Молекулярная биофизика / под ред. Г. М. Франка. М., 1965.
6. *Жаботинский А. М.* Концентрационные автоколебания. М., 1974.

7. Лаврова А. И., Постникова Е. Б., Романовский Ю. М. Брюсселятор — абстрактная химическая реакция? // УФН. 2009. Т. 179, № 12. С. 1327—1329.

8. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные модели в биологии. Лекции о моделях. М., 1983.

9. Пуртов П. А. Введение в неравновесную химическую термодинамику : учеб. пособие. Новосибирск, 2000. С. 4—5.

10. Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. М. ; Ижевск, 2010.

### **Об авторах**

Александра Сергеевна Кочина — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: a\_kochina@mail.ru

Михаил Николаевич Протасевич — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: MProtasevich@kantiana.ru

### **The authors**

Alexandra S. Kochina, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: a\_kochina@mail.ru

Mikhail N. Protasevich, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: MProtasevich@kantiana.ru

**А. И. Захаров, Э. Л. Сейтумерова, С. Г. Шпилевая**

**МУЛЬТИСЕРВИСНАЯ КОРПОРАТИВНАЯ  
СЕТЬ ПРЕДПРИЯТИЯ**

*Предложена концепция построения мультисервисной корпоративной сети административного здания промышленного предприятия, относящегося к объектам пищевой (молочной) промышленности. Сеть позволит максимально оптимизировать взаимодействие подразделений предприятия на различных этапах его функционирования и повысить общую эффективность производственного цикла. При разработке сети реализуется метод предоставления полного спектра необходимых услуг и сервисов при условии минимизации затрат на оборудование и развертывание сетевой инфраструктуры. В статье приводятся алгоритмы расчетов характеристик элементов сети, критерии выбора оптимальных технологий и оборудования. С учетом конструктивных и архитектурных особенностей объекта при помощи специализированного программного обеспечения выполнена оценка зон распространения радиосигнала в пределах внутренних помещений административного здания. Это позволило смоделировать беспроводной сегмент сети Wi-Fi, установить его функциональные возможности. В ходе проведения исследования разработаны общая структурная схема сети, подробный план размещения структурированной кабельной системы, выполнены необходимые оценочные расчеты. В качестве исходных данных для разработки сети использовалась имеющаяся рабочая документация применяемых архитектурных решений — поэтажный план помещений административного корпуса предприятия. Количество автоматизированных рабочих мест рассчитывалось в соответствии с действующими санитарными нормами и правилами.*

*The concept of building a multiservice corporate network of an administrative building of an industrial enterprise related to objects of the food (dairy) industry is proposed. The network will maximize the interaction of the company's departments at various stages of its operation and increase the overall efficiency of the production cycle. When developing a network, a method is implemented to provide a full range of necessary services and services, while minimizing the cost of equipment and network infrastructure deployment. The article presents algorithms for calculating the characteristics of network elements, criteria for choosing optimal technologies and equipment. Based on the consideration of the structural and architectural features of the object, an assessment of the radio signal propagation zones within the interior of the administrative building was carried out using specialized software. This made it possible to simulate the wireless segment of the Wi-Fi network, to establish its functionality opportunities. During the research, a general structural scheme of the network, a detailed plan for the placement of a structured cable system were devel-*

*oped, and the necessary estimates were made. The available working documentation was used as the initial data for the development of the network, the architectural solutions used were the floor plan of the premises of the administrative building of the enterprise. The number of automated workplaces was calculated in accordance with current sanitary standards and regulations.*

**Ключевые слова:** мультисервисная корпоративная сеть, автоматизированное рабочее место, беспроводной доступ, аудиовизуальный контроль, структурированная кабельная система

**Keywords:** multiservice corporate network, automated workplace, wireless access, audio-visual control, structured cabling system

Современные локальные вычислительные мультисервисные сети позволяют систематизировать информацию, автоматизировать производственные процессы, оптимизировать распределение информации между сотрудниками для слаженной внутрикорпоративной работы, а также обеспечивают одновременный доступ к данным и обмен ими в рамках единой инфраструктуры, организованной на ограниченной территории офисного здания, предприятия или образовательного учреждения [1; 2].

Обеспечение мультисервисной корпоративной сетью вводимого в строй административного здания является важной предпосылкой эффективного функционирования всего предприятия и поддержания всех реализуемых на нем производственных процессов. Именно поэтому вопросам разработки сети уделяется существенное внимание, как правило, уже на стадии проектирования всего объекта.

Начальные проектные действия предполагают учет используемых архитектурных решений, отраженных в рабочей документации возводимого здания [3]. В качестве объекта развертывания сети нами выбрано интенсивно развивающееся предприятие по переработке молока производственной мощностью 350 т/сут в городе Черняховске Калининградской области. Административный корпус предприятия представляет собой двухэтажное здание, площадь каждого этажа — 720 м<sup>2</sup>, предполагается размещение 140 рабочих мест. На первом этаже расположены помещения охранного и медицинского пунктов, лаборатории, места общего пользования, служебные помещения и два офиса. Второй этаж включает преимущественно офисные помещения, три венткамеры, серверную и зал для совещаний.

Предполагается, что проектируемая корпоративная сеть будет предоставлять пользователям услуги IP-телефонии, видеоконференцсвязи и передачи изображений, видеонаблюдения, широкополосного доступа в Интернет, локальных информационных сервисов. При этом комплекс применяемых технических решений должен отвечать следующим основным критериям: гибкость по отношению к изменениям организационной структуры предприятия, возможным перемещениям рабочих мест и изменению их функционала; высокая надежность отдельных компонентов и систем автоматизации в целом, использование средств резервирования; архитектурные решения, исключающие возможность создания тупико-

вой ситуации; обеспечение информационной безопасности для персонала и технических средств; необходимая производительность сетевых соединений при максимальном количестве одновременно работающих сеансов пользователей сети.

Количество объектов сети и автоматизированных рабочих мест (АРМ) указано в таблице 1. В качестве исходных данных для разработки сети использована рабочая документация архитектурных решений — поэтажный план помещений административного корпуса предприятия [1]. Количество АРМ рассчитано в соответствии с п. 5.2 СанПиН 2.2.3670-20 [4] с учетом требования к площади одного рабочего места не менее 4,5 м<sup>2</sup>. На основе поэтажного плана рассчитано максимально возможное количество АРМ.

Таблица 1

**Исходные данные**

Тип конечного устройства	Первый этаж	Внешний периметр первого этажа	Второй этаж	Число устройств данного типа
АРМ	13	—	52	65
IP-телефоны	12	—	51	63
МФУ	3	—	12	15
Камеры видеонаблюдения	18	22	8	48
Точки доступа	4	—	3	7
Число устройств на этаж	72		75	—

Система видеонаблюдения предусматривает осуществление визуального контроля и удаленного просмотра видеозаписей по скоростному каналу, передаваемых посредством сетевого протокола. Обработываемая 26 внутренними и 22 внешними IP-камерами аудио- и видеoinформация записывается и хранится на специализированном видеосервере, который устанавливается в серверном помещении на втором этаже. Присоединение сети передачи данных проектируемого корпуса к сети общего пользования выполняется через оптический кабель.

Локальная сеть имеет двухуровневую структуру, которая объединяет уровни ядра и распределения. Такой тип сети наилучшим образом подходит для небольших организаций. В качестве ядра сети используется управляемый коммутатор L3. Все оконечные устройства подключаются к управляемым L2 коммутаторам доступа. Схема проектируемой локальной сети изображена на рисунке 1.

В соответствии с данными из таблицы 1 производим расчет трафика. С учетом выбора кодека G.711, для IP-телефонии необходимо обеспечить полосу пропускания равную 3,85 Мбит/с [4]. Для расчета трафика видеопотоков используем характеристики видеокамер, представленные в таблице 2. Результат составляет 222 Мбит/с. Общая пропускная способность приема и передачи данных 316,575 Мбит/с.

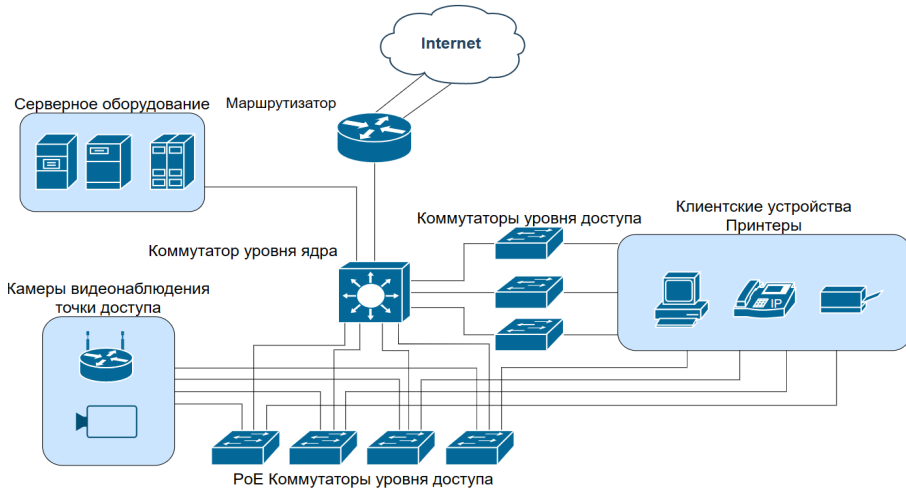


Рис. 1. Структурная схема проектируемой локальной сети

Таблица 2

**Параметры видеокамер, используемые для расчета**

Параметр	Характеристика
Разрешение камеры	2Мрiх 1920 × 1080 (внеш.)/ 4Мрiх 1920 × 1080 (внутр.)
Тип сжатия	H.241/MJPEG
Средняя активность в кадре	X = 0,06
Количество кадров в секунду	FPS = 25 к/с
Количество камер данного типа	N = 22 шт. (внеш.) / 26 шт. (внутр.)

Расчет трафика услуг доступа к сети Интернет проведен с использованием данных из таблицы 3, причем результат составил 1650 Мбит/с. Общая полоса пропускания для передачи и приема трафика составила 2192,425 Мбит/с. С учетом заложенной резервной полосы пропускания для возможного роста компании получено конечное значение требуемой полосы пропускания для приема и передачи трафика: 3288,6 Мбит/с.

Таблица 3

**Данные для расчета трафика услуг доступа к сети Интернет**

Параметр	Характеристика
Общее число абонентов сети	N = 150
Пользователи, которые могут находиться в сети одновременно	$N_0 = 0,1N$
Пользователи, которые могут находиться в сети при наибольшей нагрузке	$N_1 = 0,2N_0$
Пользователи, которые могут загружать данные	$N_2 = 0,25N_1$

Параметр	Характеристика
Средняя полоса пропускания, приходящаяся на одного абонента	BWA = 50 Мбит/с
Пиковая полоса пропускания на одного абонента	BWP = 100 Мбит/с
Отношение длины заголовка к длине пакета	ОН = 0,1

На физическом уровне сеть имеет иерархическую двухуровневую архитектуру. Проводная инфраструктура соединения конечных устройств с коммутаторами представляет собой структурированную кабельную систему (СКС) с использованием кабеля типа «витая пара» Cat 5e, обеспечивающего пропускную способность до 1 Гбит/с. На участке соединения коммутаторов использован оптоволоконный кабель. Для присоединения платы сетевого устройства к оптическому волокну используется SFP трансивер. При проектировании расположения коммутаторов и устройств уровня доступа учтена максимальная длина кабельного сегмента, равная 100 м: 90 м для фиксированного кабеля и 10 м для кабелей коммутации. От коммутатора уровня ядра, установленного в серверной на втором этаже, проложен горизонтальный кабельный канал, ведущий к лестничной клетке, в которой находится кабель-канал вертикального сообщения, ведущий на первый этаж здания — к подвесному распределительному шкафу, из которого проводка расходится по этажу в пластиковых кабель-каналах, крепящихся к стене или над подвесным потолком (в коридорах и обеденном зале).

Для выбора сетевого оборудования рассчитываем количество портов доступа в нисходящем направлении. Принимается условие, что аппаратные IP-телефоны имеют два порта Ethernet с выделенными интерфейсами, один из которых предназначен для подключения к коммутатору (uplink — LAN), а второй — к ПК (downlink — PC) [5]. Общее количество портов для первого этажа — 60, для второго — 75. Выбранные L3 и L2 коммутаторы представлены в таблице 4 с указанием их количества и расположения в здании.

Таблица 4

**Данные выбранных коммутаторов**

Назначение	Производитель, модель	Количество	Расположение
L3 коммутатор уровня ядра	D-link 30PS PoE lite	1	Серверная
L2 коммутатор уровня доступа	D-link DGS-1510-52XMP	2	Серверная, ШТК на лестничной клетке
L2 коммутатор уровня доступа	D-link DMS-1210-20F1	3	Два устанавливаются в кабинетах с 8 АРМ и 1 МФУ, третий — в бухгалтерии

Назначение	Производитель, модель	Количество	Расположение
L2 коммутатор уровня доступа	D-link DGS-1210-28MP/E1	2	Серверная, ШТК на лестничной клетке
L2 коммутатор уровня доступа	D-link DGS-1100-18PV2	1	Зал совещаний

Полные характеристики каждой модели представлены на официальном сайте компании D-Link [6].

В качестве маршрутизатора, выполняющего функции осуществления выхода в сеть Интернет и межсетевого экрана, выбрана модель ER8411 компании TP-Link [5], которая установлена в серверной. В качестве сервера IP-телефонии был выбран АТС AsteriskNOW 150 [7].

На физическом уровне размещение беспроводной сети планируется на всех этажах здания. Первичное прогнозирование распространения радиоволн внутри помещения на частотах от 300 МГц до 450 ГГц выполняется с использованием обобщенной модели потерь, представленной в рекомендации МСЭ-R P.1238 [8].

Мощность на входе приемного переносного терминала рассчитывается по формуле

$$P_R = P_T + G_T - L_{total}(d) \text{ дБ},$$

где  $P_R$  — мощность сигнала на входе приемного переносного терминала,  $P_T$  — мощность передатчика,  $G_T$  — коэффициент усиления передающей антенны,  $L_{total}$  — потери на трассе в зависимости от расстояния переносного терминала от точки доступа [6]. На рисунке 2 представлены графики зависимости уровня сигнала на входе переносного терминала от расстояния до точки доступа для 2,4 ГГц и 5,2 ГГц.

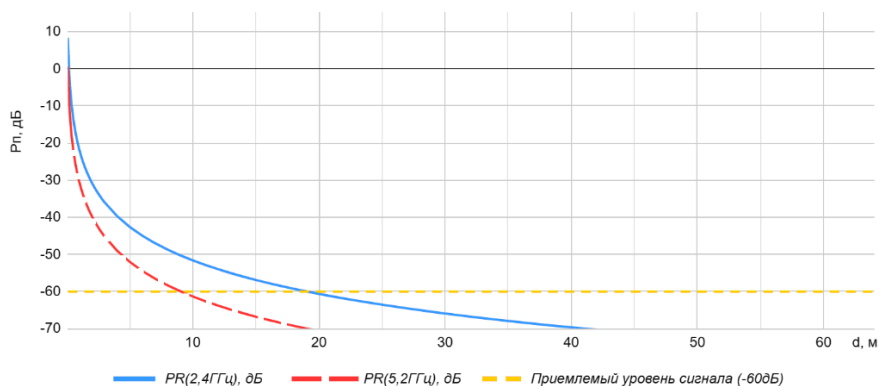


Рис. 2. График затухания сигнала с расстоянием на частотах 2,4 и 5,2 ГГц

Согласно стандартам по проведению инсталляционных работ [7], уровень сигнала Wi-Fi считается приемлемым, когда в самой удаленной точке мощность сигнала на приеме имеет значение от нуля до минус 60 дБм. Уровень приемлемого сигнала отмечен на графике желтой пунктирной линией. Максимальное расстояние между базовой станцией и переносным терминалом на частоте сигнала 2,4 ГГц составляет около 19 м, а на частоте 5,2 ГГц пороговое значение достигается при расстоянии в 9 м. Моделирование и оптимизация реальной зоны покрытия сети беспроводного доступа с учетом дополнительных параметров здания, таких как стены, перегородки и материалы, из которых они изготовлены, выполняются с помощью программы EkaHau AI Pro [9]. В результате оптимизации на первом этаже запланировано 4, на втором — 3 точки доступа модели DAP-3662 AC1200 производителя D-Link.

Проектируемая система аудиовизуального контроля предусматривает установку 48 IP-камер, подключаемых посредством кабеля типа «витая пара» категории 5е в оболочке LSLTx, который предназначен как для внутренней, так и для наружной прокладки. Его установка осуществляется совместно с кабелями СКС в трубах, коробах ПВХ и над подвесным потолком.

Для целей видеонаблюдения выбраны камеры с поддержкой PoE от производителя ТВТЕС [10]: модель ТВС-I1221IR для внешнего видеонаблюдения и модель ТВС-I2221IR для внутреннего. Для контроля и управления видеоресурсами используется программное обеспечение, предлагаемое производителем, идущее в комплекте: VMS или CMS для удаленной работы с видеорегистраторами и IP-камерами ТВТЕС, в зависимости от операционной системы. Записи с камер поступают на два гибридных IP-видеорегистратора производителя ТВТЕС модели TBR-N2532 с возможностью подключения 32 IP-камер видеонаблюдения, которые устанавливаются в серверной.

Для IP-адресации применяются адреса класса С с возможностью использования до 254 узлов. Девять подсетей для всех административных служб включают системного администратора, администрацию, бухгалтерию, медицинский пункт, сеть Wi-Fi, видеонаблюдение, ПК, IP-телефонию, МФУ.

Структурная схема сети здания, построенная с помощью программного обеспечения Draw.io, представлена на рисунке 3. План размещения структурированной кабельной системы на этажах здания удобно выполнить в программе AutoCad.

Предлагаемая сеть позволит максимально оптимизировать работу предприятия, обеспечив эффективное взаимодействие его структурных элементов в рамках единой взаимоувязанной информационной инфраструктуры.

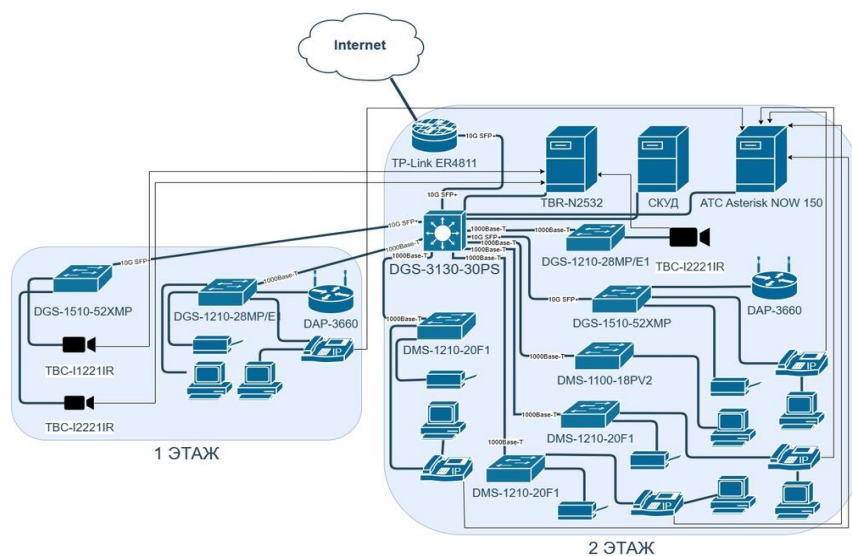


Рис. 3. Структурная схема локальной вычислительной сети предприятия

### Список литературы

1. Олифер В. Г., Олифер Н. А. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы: Юбилейное издание. СПб., 2020.
2. Атаева О. Развитие компьютерных сетей и их роль в экономике // Вестник науки. 2023. Т. 1, № 4 (61). С. 274—277.
3. Гребенкина А. Ю. Суть и значение локальных и глобальных компьютерных сетей // Научные исследования XXI века. 2023. № 2 (22). С. 27—29.
4. Об утверждении санитарных правил СП 2.2.3670-20 «Санитарно-эпидемиологические требования к условиям труда от 02 декабря 2020». URL: <https://docs.cntd.ru/document/573230583?marker=6560Ю> (дата обращения: 17.02.2024).
5. Варианты подключения IP-телефонов и ПК к свитчу. URL: <https://forum.huawei.com/enterprise/ru/варианты-подключения-ip-телефона-и-пк-к-свитчу/thread/578180-100131> (дата обращения: 18.02.2024).
6. D-Link : [официальный сайт]. URL: <https://dlink.ru/ru> (дата обращения: 20. 01.2024).
7. Сети для предприятий TP-Link Россия. URL: <https://www.tp-link.com/ru/business-networking/solution/enterprise> (дата обращения: 17.01.2024).
8. Рекомендация МСЭ-R P.1238-8. URL: [https://www.itu.int/dms\\_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.1238-8-201507-S!!PDF-R.pdf](https://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.1238-8-201507-S!!PDF-R.pdf) (дата обращения: 09.02.2024).
9. Григорьев А. О. Проектирование компьютерной сети // Интернаука. 2022. № 46-1 (269). С. 28—29.
10. Оборудование для организации видеонаблюдения ТВТЕС. URL: <https://tbtec.ru/index.php> (дата обращения: 23.02.2024).

### Об авторах

Артем Игоревич Захаров — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.  
E-mail: AIZakharov@kantiana.ru

Элиза Ленарьевна Сейтумерова — магистрант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: eliza.sey@mail.ru

Светлана Геннадьевна Шпилевая — канд. пед. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: SSHpilevaya@kantiana.ru

### **The authors**

Artem I. Zacharov, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: AIZacharov@kantiana.ru

Eliza L. Seitumerova, Master's student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: eliza.sey@mail.ru

Dr Svetlana G. Shpilevaya, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: SSHpilevaya@kantiana.ru

**В. Е. Пониматкин, С. Г. Шпилевая, В. А. Гоглев, Г. К. Ерин**

### **МАЛГОГАБАРИТНАЯ ПРИЕМО-ПЕРЕДАЮЩАЯ АНТЕННАЯ СИСТЕМА**

*Вопросы разработки малогабаритных антенных систем остаются актуальными, особенно для систем связи специального назначения при необходимости осуществления надежного радиообмена в максимально широкой полосе частот. Поскольку эффективность излучения и приема электромагнитных сигналов в значительной степени зависит от соотношения между физическими размерами элементов антенной системы и длиной волны, обеспечение приемлемых массогабаритных показателей широкодиапазонной антенны представляет собой нетривиальную инженерную задачу, требующую дополнительных конструкторских действий. При этом увеличение числа антенно-фидерных устройств, обеспечивающих функционирование одной радиостанции в широком частотном диапазоне, является нежелательным, поскольку создает дополнительные трудности с их размещением в ограниченном пространстве узла связи.*

*С учетом представленных обстоятельств предложен метод оптимизации функционального комплекса радиостанции, заключающийся в обеспечении ее работы в широком интервале частот 100 МГц — 10 ГГц на единую антенну. Конструкция позволяет системе функционировать в симплексном и дуплексном режимах, обеспечивает радиообмен с использованием режима псевдослучайной перестройки частоты, повышенную маневренность информационного обмена и наибольшую для соответствующего диапазона дальность радиосвязи.*

*The issues of developing small-sized antenna systems remain relevant, especially for special-purpose communication systems, if it is necessary to carry out reliable radio exchange in the widest possible frequency band. Since the efficiency of radiation and reception of electromagnetic signals largely depends on the ratio between the physical dimensions of the antenna system elements and the wavelength, ensuring acceptable weight and size parameters of a wide-range antenna is a non-trivial engineering task requiring additional design actions. At the same time, an increase in the number of antenna-feeder devices that ensure the operation of one radio station in a wide frequency range is undesirable, since it creates additional difficulties with their placement in a limited space of the communication node.*

*Taking into account the presented circumstances, the authors propose a method for optimizing the functional complex of the radio station, which consists in ensuring its operation in a wide frequency range of 100 MHz — 10 GHz per single antenna. At the same time, the possibilities of functioning of the system in simplex and duplex*

*modes are realized, ensuring pseudo-random frequency tuning, increased maneuverability of information exchange, and the greatest radio range for the corresponding range is provided.*

**Ключевые слова:** малогабаритная антенная система, широкий частотный диапазон, псевдослучайная перестройка частот, предельная дальность радиосвязи

**Keywords:** small-sized antenna system, wide frequency range, pseudorandom adjustment of frequencies, maximum range of radio communication

В качестве базовых объектов в представленной разработке будем использовать прототипы, описанные в патентах РФ [1; 2] и имеющие следующие недостатки:

— для повышения защищенности каналов связи в симплексном и дуплексном режимах целесообразно помимо ручного управления радиостанцией использовать режим псевдослучайной перестройки рабочей частоты (ППРЧ);

— рабочий частотный диапазон зависит от параметров используемых антенных систем ведущей и ведомой радиостанций, что затрудняет ведение радиосвязи с перестройкой по частоте;

— не учтена зависимость предельной дальности радиосвязи от рабочей частоты (например, для  $\nu \approx 100$  МГц дальность связи более 10 км, для  $\nu \approx 800$  МГц — 1 км, для  $\nu \approx 10$  ГГц — 300 м и т. п.);

— отмечается недостаточная скорость информационного обмена на частотах 100—500 МГц, что вызывает необходимость использовать более высокочастотные диапазоны. Как следствие, возникает потребность в широкодиапазонной антенне, конструкция которой в публикациях [1; 2] не рассматривалась.

Существующие антенные системы метровых, дециметровых и сантиметровых волн обладают весьма малым коэффициентом перекрытия по частоте [3] и поэтому не полностью отвечают условиям работы в заявленном диапазоне (100 МГц — 10 ГГц). В частности, для работы на частотах от 100 до 400 МГц используются такие типы излучателей, как симметричные вибраторы с плечами в виде цилиндров (рис. 1, а), конусов (рис. 1, б), шунтовой вибратор Айзенберга (рис. 1, в), дисковая антенна (рис. 1, г) [4; 5].

На рисунке 1 представлены схемы построения перечисленных антенных систем: цилиндрический симметричный полуволновый вибратор (а), используемый для ближней радиосвязи в диапазоне от 100 МГц до 150 МГц, состоящий из двух проволочных цилиндров (2), соединенных посредством конической формы на изоляторе (4) с двухпроводной фидерной линией (3); биконический вибратор ближней связи (б), состоящий из плеч (1) и проводной линии (2), применяемый в диапазоне частот 100—400 МГц; симметричный шунтовой вибратор Айзенберга (в), работающий в диапазоне частот от 100 до 400 МГц (1 — плечо вибратора в виде проволочного цилиндра, 2 и 3 — шунты, соединяющие вибраторы между собой, 4 — опора, объединяющая шунты в центральной части); антенна в виде диска (г) для радиосвязи в диапазоне частот 100—150 МГц,

состоящая из собственно диска (1), изолятора (2), конусного элемента (3), обеспечивающего жесткость конструкции и соединенного с корпусом (4), внутри которого проходит коаксиальный кабель питания.

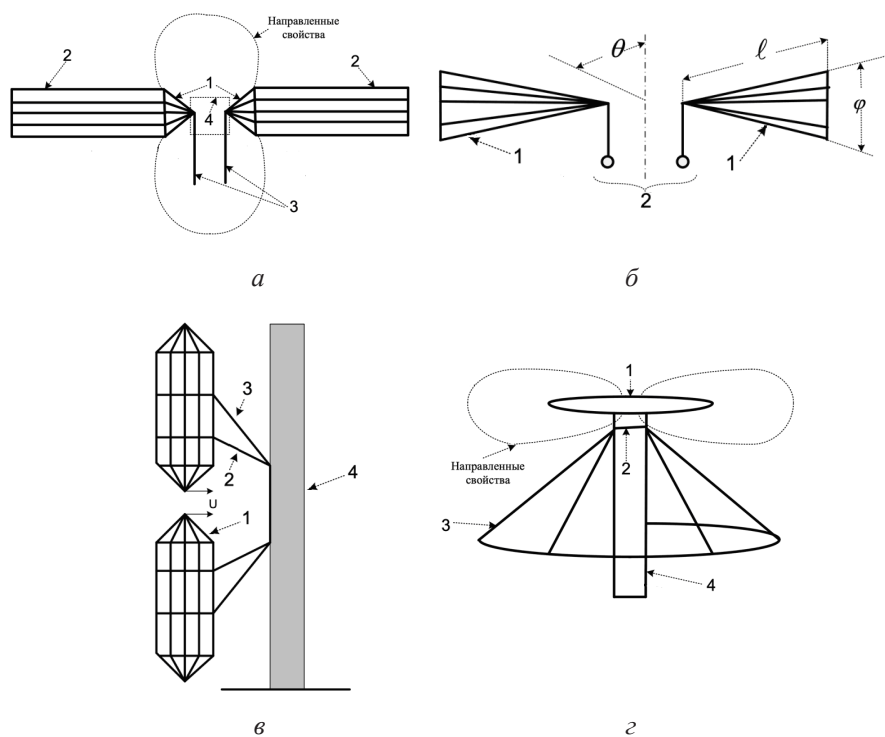


Рис. 1. Варианты антенных систем, используемых в средствах связи диапазона 100—400 МГц: а, б — симметричный вибратор; в — шунтовой вибратор; з — дисковая антенна

Недостатками цилиндрического полуволнового вибратора, как и других представленных конструкций (рис. 1), являются ограниченный диапазон использования частот (коэффициент перекрытия равен 1,2), значительная масса и габариты антенн. В самом деле, излучающие свойства вибратора в значительной степени определяются физическими размерами его элементов: плечо антенны настраивается приблизительно на среднюю частоту рабочего диапазона:  $f \approx 125$  МГц, длина волны  $\lambda_0 \approx 2,4$  м, при этом длина плеча  $l = \lambda_0/4 \approx 0,6$  м. Таков оптимальный геометрический размер антенны, соответствующий состоянию ее резонанса как колебательной системы, что обеспечивает чисто активное входное сопротивление антенны и облегчает ее согласование с фидерной линией. При сокращении размеров вибратора увеличивается емкостная составляющая эквивалентного входного импеданса антенны и снижается эффективность передачи энергии между ней и приемо-передающим трактом. При этом максимум излучения антенны лежит в плоскости перпендикулярной оси плеч вибратора. Конфигурация плеч конического вибратора определяется углом  $\theta$  (рис. 1, б), и при средней частоте рабочего диа-

пазона  $f_0 \approx 250$  МГц ( $\lambda_0 \approx 1,2$  м) оптимальная длина плеча  $l = \lambda_0/4 \approx 0,3$  м. Аналогичные результаты имеют место также для антенны в виде симметричного шунтового вибратора Айзенберга (рис. 1, в). Дисконусная антенна (рис. 1, з) характеризуется диаграммой направленности в виде восьмерки с максимумом излучения, лежащим в плоскости диска.

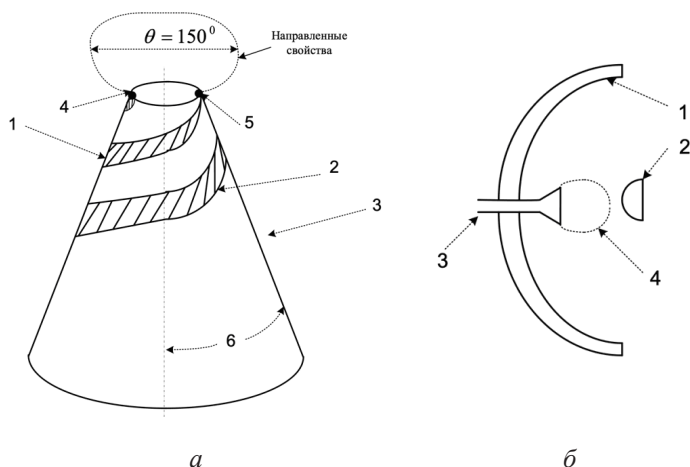


Рис. 2. Схематическое изображение конструкции антенных систем:  
 а — двухзаходная логоспиральная коническая антенна (400—800 МГц),  
 б — двухзеркальная антенна Кассегрена (3—7 ГГц)

Известны также конструкции антенных систем в виде двухзаходной конической спирали (рис. 2, а), используемой в рабочем диапазоне 400—800 МГц [6], и двухзеркальной антенны Кассегрена (рис. 2, б) [5], обеспечивающих радиосвязь через низколетящие спутники Земли. На рисунке 2, а цифрами обозначены: 1 — первый элемент логоспирали, подключенный к выводу 5 и заземленный с противоположной стороны, 2 — второй элемент логоспирали, подключенный к выводу 4 и заземленный с другой стороны, 3 — конический сегмент, обеспечивающий размещение спиральных элементов, 6 — угол раскрытия конической поверхности ( $\sim 10^\circ$ ),  $\theta$  — угол, характеризующий направленные свойства антенной системы ( $\sim 150^\circ$ ). На рисунке 2, б: 1 — основное параболическое зеркало антенны, 2 — второе гиперболическое зеркало антенны, 3 — рупорный облучатель гиперболоида вращения 2, 4 — диаграмма направленности рупорного облучателя. Антенны демонстрируют общий недостаток — ограниченные частотные свойства и, как следствие, возможность функционирования радиостанции лишь в относительно узком частотном спектре, а также значительные физические размеры отдельных конструктивных элементов (в частности, диаметр первого зеркала антенны Кассегрена составляет 1,2—1,8 м).

С целью преодоления недостатков проанализированных выше конструкций определяем в качестве базовых объектов радиостанции, описанные в [1; 2]. Данные, полученные по расчету расстояний распространения электромагнитных волн в воздушной среде в диапазоне частот

100—10 000 МГц двумя методиками (рис. 3, 4), позволяют обосновать модель радиостанции, обеспечивающую радиосвязь с учетом ее предельной дальности.

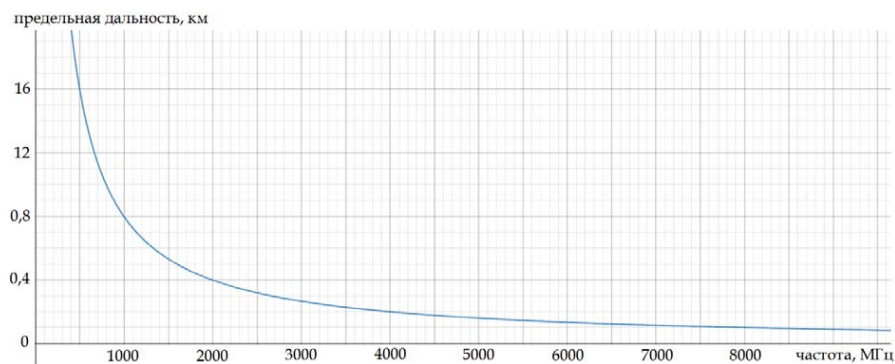


Рис. 3. График зависимости предельного затухания сигнала от расстояния радиосвязи в зависимости от частоты по модели Фока

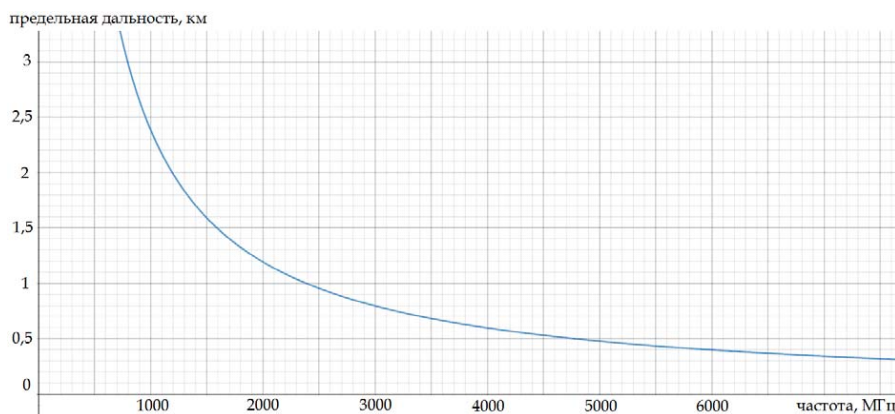


Рис. 4. График зависимости предельного затухания сигнала от расстояния радиосвязи в зависимости от частоты по модели Уолфиша — Икегами

Результат, представленный на первом графике (рис. 3), выполненном по модели Фока [7], демонстрирует предельные расстояния устойчивого радиообмена для характерных частот. Соответственно, на частоте 100 МГц дальность связи составит 20 км, на частоте 500 МГц — 14 км, 1000 МГц — 0,8 км, 5000 МГц — 0,2 км, 10 000 МГц — 0,15 км и т. д. Расчет, выполненный по модели Уолфиша — Икегами [8] (рис. 4), показывает: на частоте 100 МГц дальность связи составит 25 км, на частоте 500 МГц — 18 км, 1000 МГц — 2 км, 5000 МГц — 0,5 км, 10 000 МГц — 0,3 км и т. д. Выбираем наихудшие условия распространения из двух представленных случаев.

Структура ненаправленной частотонезависимой антенной системы, работающей в диапазоне от 100 МГц до 10 ГГц, представлена на рисунке 5. Антенна содержит основание модуля с одновременным размещени-

ем четырех совместно работающих симметричных вибраторов взаимно перпендикулярной ориентации, два из которых, первый (1) и третий (3), обеспечиваются симметричным питанием, а другие два, второй (2) и четвертый (4), — несимметричным питанием.

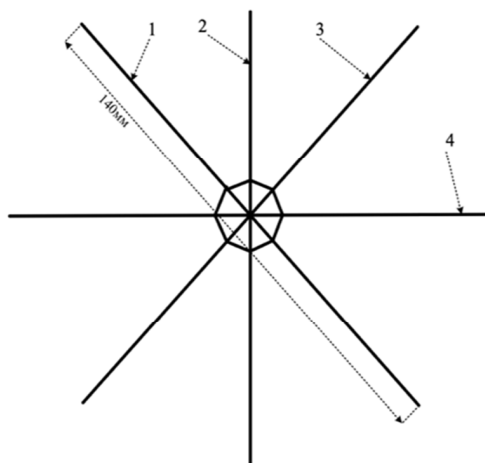


Рис. 5. Структура построения ненаправленной частотонезависимой антенны

На рисунке 6 показана диаграмма направленности антенной системы, структура которой представлена на рисунке 5.

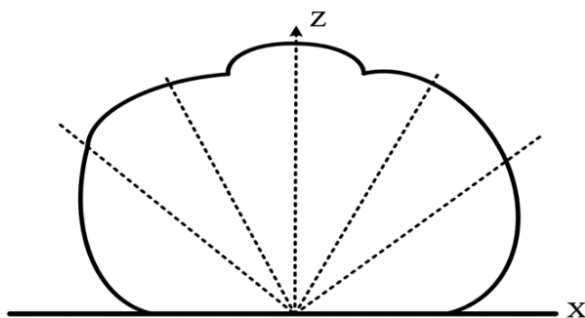


Рис. 6. Диаграмма направленности антенного модуля, структура которого представлена на рисунке 5

Наличие в конструкции четырех симметричных вибраторов обеспечивает практически равномерное пространственное распределение коэффициента направленного действия. При этом коэффициент усиления антенны практически в любом из направлений  $G > 20$ , что делает ее конструкцию удобной для обеспечения связи в диапазоне 100 МГц — 10 ГГц с разнообразными, в том числе подвижными, объектами [8; 9].

На рисунке 7 представлена структура аппаратного комплекса, обеспечивающего радиообмен с использованием предлагаемой антенной системы.

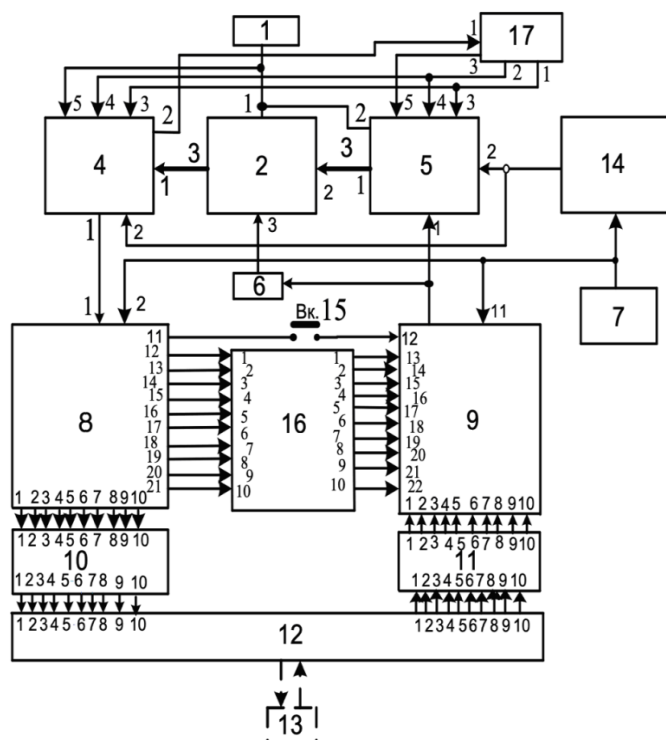


Рис. 7. Структурная схема приемо-передающего комплекса

В состав радиостанции помимо антенного модуля (1) входят диодно-емкостной переключатель (2), коаксиальная линия (3), комплект радиоприемных (4) и радиопередающих (5) устройств, усилитель накачки (6), генератор импульсов (7), выносной пост оператора связи (13), блок перестройки рабочей частоты (ППРЧ) (14), выключатель (15), блок аппаратуры передачи данных (16). Для достижения поставленной в работе цели в базовую конструкцию радиостанции введены ненаправленная частотонезависимая антенная система (1), содержащая две пары ортогональных симметричных вибраторов (рис. 5) — симметричного и несимметричного питания, рассчитанная на диапазон 100 МГц — 10 ГГц; блоки канальных преобразователей приемной (8) и передающей (9) систем, десять цифроаналоговых преобразователей (10) и аналого-цифровых преобразователей (11), блок частотных фильтров (12), блок выбора рабочих частот и режима работы радиостанции (17).

На рисунке 8 представлена конструкция одного из симметричных вибраторов ненаправленной частотонезависимой антенной системы 1, рассчитанной на диапазон частот 100 МГц — 10 ГГц. Компактные геометрические размеры данного элемента модуля (154×140 мм) обеспечивают приемлемые массогабаритные показатели всей антенны, конструкция модуля которой, содержащая два идентичных совместно используемых симметричных вибратора с взаимно ортогональным расположением в пространстве друг относительно друга, представлена на рисунке 9.

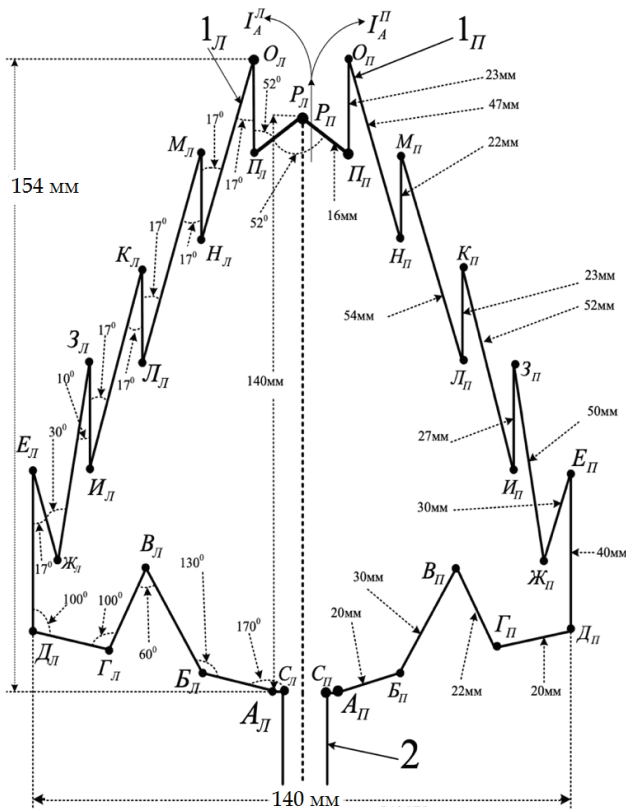


Рис. 8. Конструкция вибратора предлагаемой антенной системы

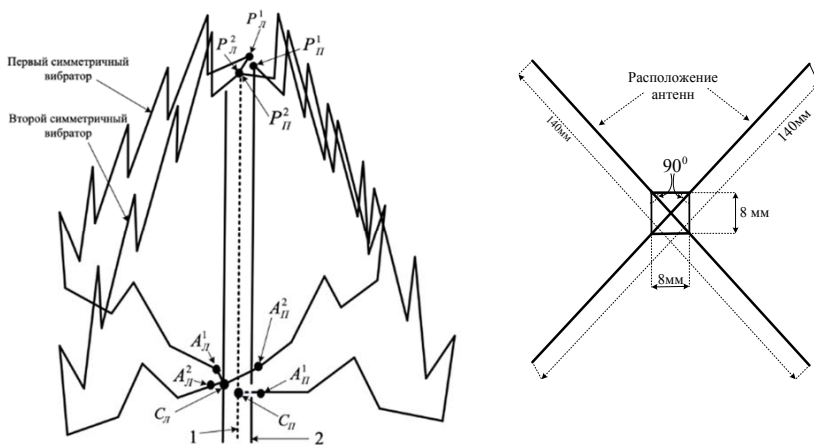


Рис. 9. Конструкция модуля антенной системы (рис. 5), содержащей два аналогичных симметричных вибратора

Таким образом, в результате анализа существующих антенных систем, используемых в работе радиостанций, определены их основные недо-

статки и предложен вариант усовершенствованной частотонезависимой конструкции, работающей в широком диапазоне частот от 100 МГц до 10 ГГц. Использование представленного технического решения позволит обеспечить уверенный радиобмен в режиме псевдослучайной перестройки частоты [10] по диалоговой схеме [11] с применением единого малогабаритного антенно-фидерного устройства без необходимости переключения комплекса на различные излучатели в пределах заявленного диапазона. При этом обеспечивается сокращение необходимого для размещения конструкции физического пространства, оптимизируется использование частотного спектра, увеличивается помехозащищенность радиоприема.

### Список литературы

1. *Корабельная частотонезависимая антенная УКВ система* : патент РФ № 2731170 от 31.08.2020 г., по заявке № 2019141346 от 11.12.2019 г. / Пониматкин В. Е. [и др.].
2. *Радиостанция для независимой работы 10 телефонными и 10 телеграфными каналами* : патент РФ № 2523120 от 22.05.2014 г., по заявке № 2013100479 от 09.01.2013 г. / Пониматкин В. Е. [и др.].
3. *Айзенберг Г. З., Ямпольский В. Г., Терешин О. Н.* Антенны УКВ. М., 1977.
4. *Вершков М. В., Миротворский О. Б.* Судовые антенны. Л., 1990.
5. *Ротхаммель К.* Антенны. М., 2005.
6. *Габеля Н. П., Истрашкин А. Д., Муравьев Ю. К., Серков В. П.* Антенны. Ч. 1 / под. ред. Ю. К. Муравьева. Л., 1963.
7. *Родос Л. Я.* Электродинамика и распространение радиоволн : учеб. пособие. СПб., 2007.
8. *Соловьянова И. П., Мительман Ю. Е., Шабунин С. Н.* Электродинамика и распространение радиоволн : учебник. Екатеринбург, 2020.
9. *Осипов О. В., Табаков Д. П., Морозов С. В.* Электродинамика и распространение радиоволн : учебник для вузов. Самара, 2021.
10. *Пониматкин В. Е., Шпилевой А. А.* Антенно-фидерные устройства систем связи : учеб. пособие. Калининград, 2010.
11. *Шпилевой А. А., Пониматкин В. Е.* Теория антенно-фидерных устройств систем связи : учеб. пособие. Калининград, 2010.

### Об авторах

Виктор Ефимович Пониматкин — канд. техн. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

Светлана Геннадьевна Шпилевая — канд. пед. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: SSHpilevaya@kantiana.ru

Владислав Алексеевич Гоглев — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: vlad935rus@yandex.ru

Глеб Константинович Ерин — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: vlad935rus@yandex.ru

### **The authors**

Dr Viktor E. Ponimatkin, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

Dr Svetlana G. Shpilevaya, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: SSHpilevaya@kantiana.ru

Vladislav A. Goglev, PhD student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: vlad935rus@yandex.ru

Gleb K. Erin, PhD student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: vlad935rus@yandex.ru

**А. А. Мохова, В. И. Бурмистров, Г. Г. Ляхов**

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЕТИ МОБИЛЬНОЙ СВЯЗИ  
ДЛЯ ЧАСТИ ЛЕНИНГРАДСКОГО РАЙОНА  
ГОРОДА КАЛИНИНГРАДА**

*Беспроводные технологии в XXI веке развиваются со стремительной скоростью, что привело к широкому использованию услуг беспроводной радиотелефонной связи и услуг беспроводного доступа. Увеличение численности населения, рост количества пользователей сети и внедрение новых сервисов вызывают значительное возрастание объема абонентского трафика, которое сопровождается ухудшением качества обслуживания. В Калининградской области уже есть доступ к сетям 2G, 3G и 4G, однако необходимо внедрение более современной технологии связи — 5G. Сеть 5G позволяет создать до миллиона подключений на каждый квадратный километр, что значительно превышает возможности предыдущего поколения сетей. Предложен подход к проектированию сети мобильной радиосвязи на примере части Ленинградского района города Калининграда. В результате проведен сравнительный анализ и сформирован комплект телекоммуникационного оборудования, проанализирована местность, выбран частотный диапазон, рассчитана пропускная способность сети и определены радиусы зон уверенного радиоприема на основе энергетических характеристик и трафика с учетом числа потенциальных абонентов. С помощью программного обеспечения ICS Telecom выполнена оптимизация размещения базовых станций на проектируемой территории, основываясь на полученных данных.*

*Wireless technologies in the 21<sup>st</sup> century are developing at a rapid pace, which has led to the widespread use of wireless radiotelephone services and wireless access services. An increase in population, an increase in the number of network users and the introduction of new services lead to a significant increase in the volume of subscriber traffic, which is accompanied by a deterioration in the quality of service. The Kaliningrad region already has access to 2G, 3G and 4G networks, but it is necessary to introduce more modern communication technology — 5G. The 5G network allows you to create up to a million connections per square kilometer, which significantly exceeds the capabilities of the previous generation of networks. An approach to designing a mobile radio network is proposed using the example of a part of the Leningradsky district of the city of Kaliningrad. As a result, a comparative analysis was carried out and a set of telecommunications equipment was formed, the terrain was analyzed, the frequency range was selected, the network capacity was calculated, and the radii of reliable radio reception zones were determined based on energy*

*characteristics and traffic, taking into account the number of potential subscribers. Using ICS Telecom software, the placement of base stations in the designed area was optimized based on the data obtained.*

**Ключевые слова:** мобильная радиосвязь 5G, радиус покрытия, сеть радиодоступа, базовая станция, трафик

**Keywords:** 5G mobile radio, coverage radius, radio access network, base station, traffic

В наше время, когда мобильные технологии становятся неотъемлемой частью нашей повседневной жизни, внедрение мобильной сети 5G представляет собой мощный шаг вперед в развитии цифрового мира. 5G может перевернуть представление о мобильной связи, предоставляя не просто быстрый доступ к Интернету, но и открывая двери для большого количества новых возможностей и сервисов. Для потребителей мобильной сети 5G означает улучшенное качество связи, увеличение скорости передачи данных и новые возможности для виртуальной и дополненной реальности. Сети 5G также будут способствовать развитию «умных» городов и Интернета вещей (IoT) через развертывание сенсорных сетей в городах и сельской местности. Встроенная безопасность и надежность в сетях 5G делают их пригодными для обеспечения общественной безопасности и использования в критически важных сферах, таких как полиция, службы безопасности, энергетика, водоснабжение и здравоохранение [1]. По этой причине усовершенствование коммуникационной системы становится важной задачей в настоящее время.

Для моделирования сети связи пятого поколения был выбран Ленинградский район города Калининграда. Рассматриваемая территория имеет общую площадь 4 км<sup>2</sup>, характеризуется городской застройкой со зданиями высотой от 3 до 70 м. Так как эта часть города является активно развивающейся, то количество пользователей сети растет с каждым годом. Это означает, что на этой территории всегда много абонентов и, следовательно, высокое потребление трафика сети. Поэтому оснащение территории современной системой сотовой связи откроет новые возможности для различных услуг и обеспечит более стабильное и быстрое соединение.

На рассматриваемой территории проживает 28 500 человек в густозаселенном районе и 12 000 в малозаселенном районе [2]. Так как крупнейшими сотовыми операторами в России являются МТС, «Мегафон» и Tele2, у которых число абонентов сети находится примерно на одном уровне [3], то количество потенциальных абонентов сети составит  $\frac{1}{3}$  от общего числа жителей, если один из операторов сможет реализовать этот проект. Также нужно обратить внимание на то, что пользоваться сетью одновременно будет примерно 40 % от всех пользователей сети. Соответственно, количество потенциальных абонентов для густозаселенного района  $(28\,500/3) \times 0,4 \approx 3800$  человек, а для малозаселенного района  $(12\,000/3) \times 0,4 \approx 1600$  человек.

Потребуется выбрать оборудование, которое обеспечит хорошее качество связи и покрытие всей территории, чтобы реализовать проектиру-

емую сеть. Необходимо учитывать такие параметры, как мощность передатчика, частотный диапазон, количество каналов связи, технологию передачи данных и прочие технические характеристики.

При выборе частотного диапазона важно учитывать решение ГКРЧ № 20-54-02 от 17 марта 2020 года [4], где определены перспективные диапазоны частот, которые могут быть применены для создания сетей связи в соответствии со стандартами 5G/IMT-2020 в РФ: 694—790 МГц, 2300—2400 МГц, 2570—2620 МГц, 4400—4990 МГц и 24,25—27,5 ГГц. Наиболее подходящим для глобального развертывания сетей пятого поколения является диапазон частот 3,4—3,8 ГГц. Однако этот диапазон не может быть использован в России из-за его занятости военными структурами. Подходящим диапазоном для данного проекта будет 4,4—4,99 ГГц. Он обладает широкой полосой частот и меньшим затуханием по сравнению с миллиметровым диапазоном, кроме того, его использование позволяет достичь высокой эффективности и сократить расходы на проектирование сети.

Далее необходимо выбрать активную антенную систему, которая объединяет в себе антенну и радиомодуль. На рынке существует широкий выбор телекоммуникационного оборудования от разных производителей, таких как Huawei, Ericsson, Nokia, Samsung и др. Наиболее подходящим вариантом для построения сети оказалось активное антенное оборудование Huawei AAU 5612, характеристики которой представлены в таблице 1 [5]. Это одна из антенных систем с частотами 4400—4900 МГц, которую можно использовать с учетом решения ГКРЧ и которая доступна для приобретения на территории Российской Федерации. Huawei AAU 5612 имеет высокую мощность передатчика, большой коэффициент усиления антенны и большой выигрыш в усилении за счет технологии формирования лучей. Для использования с этой антенной системой производитель рекомендует базовую станцию Huawei BBU5900, которая обеспечивает высокую пропускную способность транспортной сети до 50 Гбит/с.

Таблица 1

#### Характеристика активной антенной системы Huawei AAU 5612

Параметр	Huawei AAU 5612
Рабочий диапазон, МГц	4400—4900
Рабочая полоса частот, МГц	40; 60; 80; 100
Модуляция	DL/UL: QPSK; 16QAM; 64QAM; 256QAM
NTX — количество портов TX/RX	64
Конфигурация MIMO	4 × 4
Количество MIMO лучей	16
$V_{TX}$ — мощность передатчика, дБм/порт	35
КТХ — коэффициент усиления антенны, дБи	24
КВГ — выигрыш в усилении за счет технологии формирования лучей, дБ	10
NF — коэффициент шума приемного устройства, дБм	7

Для того чтобы оценить размер зоны покрытия базовой станции, решим уравнение

$$B_{RC} = M(R), \quad (1)$$

где  $B_{RC}$  — бюджет радиоканала;

$M(R)$  — математическая модель, описывающая ослабление радиосигнала в процессе его распространения от передатчика к приемнику.

При оценке бюджета радиоканала (2) необходимо учитывать как параметры передающего и приемного оборудования, так и влияние различных факторов, приводящих к поглощению или рассеянию электромагнитных волн при их распространении:

$$B_{RC} = B_{t_{EIRP}} - B_{r_{min}} - F_B - F_V - F_R - F_H - F_D - F_I, \quad (2)$$

где  $B_{t_{EIRP}}$  [дБм] — эквивалентная изотропно-излучаемая мощность на выходе антенны передатчика (ЭИИМ);

$B_{r_{min}}$  [дБм] — минимальная уровень сигнала на входе приемного устройства, необходимый для его корректной работы;

$F_B$  [дБм] — уменьшение мощности сигналов мобильной связи при их проникновении в здания;

$F_V$  [дБм] — ослабление радиосигнала растительностью;

$F_R$  [дБм] — затухание в гидрометеорах;

$F_H$  [дБм] — экранирование электромагнитных волн телом человека;

$F_D$  [дБм] — падение мощности радиосигнала, вызванное медленными замираниями;

$F_I$  [дБм] — учет ослабления сигнала, обусловленного быстрыми замираниями.

Эквивалентная изотропно излучаемая мощность передатчика определяется из следующего уравнения:

$$B_{t_{EIRP}} = B_{TX} + 10\lg(N_{TX}) - F_{TX} + K_{TX} + K_{BF}, \quad (3)$$

где  $B_{TX}$  [дБм] — мощность, излучаемая каждой антенной;

$N_{TX}$  — количество антенн передающего модуля;

$F_{TX}$  [дБм] — потери в передатчике (разъемы, фидеры, дуплексеры, комбайнеры);

$K_{TX}$  [дБм] — коэффициент усиления антенны передающего устройства;

$K_{BF}$  [дБм] — выигрыш в усилении за счет применения технологии формирования лучей (beamforming).

Минимально требуемый уровень мощности в сигнале, поступающем на приемное устройство, вычисляется по формуле

$$B_{r_{min}} = B_{RX} - 10\lg(N_{RX}) - K_{RX} + F_{RX}, \quad (4)$$

где  $B_{RX}$  [дБм] — чувствительность приемного устройства;

$N_{RX}$  — число антенн приемного устройства, используемых для реализации одной передачи радиосигнала;

$K_{RX}$  [дБм] — коэффициент усиления антенны приемного устройства;

$F_{RX}$  [дБм] — потери в приемнике (разъемы, фидеры, дуплексеры, комбайнеры).

Данные для расчета ЭИИМ для антенной системы Huawei AAU 5612 представлены в таблице 2.

Таблица 2

**Данные для нахождения ЭИИМ,  $P_{xmin}$ ,  $N_x$  (Downlink, Uplink),**

Параметр	Downlink	Uplink
$B_{RX}$	35 дБм	23 дБм
$N_{TX}$	64	4
$F_{TX}$	1 дБ	0
$K_{TX}$	24 дБи	0
$K_{BF}$	10 дБм	10 дБм

Чувствительность приемного устройства определяется следующим образом:

$$B_{RX} = NF + W + SINR, \tag{5}$$

где NF — коэффициент шума;

W — шум, обусловленный тепловым движением зарядов;

SINR — соотношение сигнал/шум и интерференция.

Значения SINR для 5G определяются согласно рекомендациям 3GPP TS 38.214 [6].

W требуется найти из формулы

$$W = -174 + 10 \lg(\Delta F), \tag{6}$$

где  $\Delta F$  [Гц] — ширина используемой полосы частот.

Результаты расчета бюджета радиоканала (максимально допустимого уровня потерь в линии связи) для прямого (DL) и обратного (UL) канала в различных режимах работах приведены в таблице 3.

Таблица 3

**Результаты расчета максимально допустимого уровня потерь в линии связи**

Бюджет радиоканала	QPSK	16-QAM	64-QAM	256-QAM
$B_{RC DL}$ , дБ	143,7	128,7	116,7	102,7
$B_{RC UL}$ , дБ	135	121	110	96

Каждое новшество в области мобильной связи 5G представляет собой последующий выпуск совместного проекта 3GPP, включающий в себя новые функциональные возможности и технологии беспроводной связи [7]. Расчет дальности связи будет производиться с учетом выбранной модели 3GPP TR 38.901 [8]. Она позволяет оценить потери для выбранного

при проектировании частотного диапазона. Согласно данной рекомендации, дальность связи для малозаселенного района городской застройки рассчитывается следующим образом:

$$M(R) = 13,54 + 39,08 \cdot \lg \left( \sqrt{R^2 + (h_{bc} - h_{ac})^2} \right) + 20 \lg(f_c) - 0,6 \cdot (h_{ac} - 1,5), \quad (7)$$

где  $h_{bc} = 25$  м — высота базовой станции;

$h_{ac} = 1,5$  м — высота абонентской станции;

$f_c$ , ГГц — частота сети, которая выбрана для проектирования;

$R$ , м — радиус обслуживания базовой станции.

Требуется упростить формулу (7) и далее выразить радиус обслуживания базовой станции для малозаселенной зоны:

$$M(R) = 27,25 + 39,08 \cdot \lg \left( \sqrt{R^2 + (h_{bc} - h_{ac})^2} \right).$$

Результаты расчета максимальной дальности связи для прямого (DL) и обратного (UL) канала в различных режимах работы приведены в таблице 4.

Таблица 4

**Результаты расчета радиуса зоны покрытия для малозаселенной зоны по формуле (7)**

Радиус	QPSK	16-QAM	64-QAM	256-QAM
$R_{DL}$ , м	954,2	393,7	193,1	81,9
$R_{UL}$ , м	571,2	249,5	128,9	52,4

Далее рассчитаем дальность связи для густозаселенного района городской застройки следующим образом:

$$M(R) = 22,4 + 35,3 \cdot \lg \left( \sqrt{R^2 + (h_{bc} - h_{ac})^2} \right) + 21,3 \lg(f_c) - 0,3 \cdot (h_{ac} - 1,5), \quad (8)$$

где  $h_{bc} = 30$  м — высота базовой станции;

$h_{ac} = 1,5$  м — высота абонентской станции;

$f_c$ , ГГц — частота сети, которая выбрана для проектирования;

$R$ , м — радиус обслуживания базовой станции.

Требуется упростить формулу (8) и далее выразить радиус обслуживания базовой станции для густозаселенной зоны:

$$M(R) = 37 + 35,3 \cdot \lg \left( \sqrt{R^2 + (h_{bc} - h_{ac})^2} \right),$$

$$R = \sqrt{\left( 10^{\frac{PL1(R)-37}{35,3}} \right)^2 - (h_{bc} - h_{ac})^2} = \sqrt{\left( 10^{\frac{L_{мдп}-37}{35,3}} \right)^2 - (h_{bc} - h_{ac})^2}.$$

Результаты расчета радиуса зоны покрытия базовой станции в густозаселенном районе для прямого (DL) и обратного (UL) канала в различных режимах работы приведены в таблице 5.

Таблица 5

**Результаты расчета радиуса зоны покрытия для густозаселенного района по формуле (8)**

Радиус	QPSK	16-QAM	64-QAM	256-QAM
$R_{DL}, \text{ м}$	1053,5	395,9	180,8	72,1
$R_{UL}, \text{ м}$	597,3	239,5	116,6	46,1

Пропускная способность в сетях 5G должна учитывать высокоскоростную передачу данных, а также предоставление различных сервисов. Поэтому расчет пропускной способности должен быть выполнен с учетом всех указанных характеристик и сервисов.

Число базовых станций:

$$N_{BS} = \frac{S_{NA}}{S_{BS\ max}} + 1, \tag{9}$$

где  $S_{NA}$  — средняя пропускная способность планируемой сети мобильной связи;

$S_{BS\ max}$  — максимальная пропускная способность базовой станции.

Средняя пропускная способность сети мобильной связи  $S_{NA}$ :

$$S_{NA} = N_{SC} \times S_{1SC}, \tag{10}$$

где  $N_{SC}$  — количество одновременных пользователей в рассматриваемой сети;

$S_{1SC}$  — средний трафик, генерируемый одним абонентом.

Параметр  $S_{1SC}$  определяется выражением

$$S_{1SC} = \sum \frac{(S_{min} \times BHSA \times PR \times (1 + PAR))}{3600} \tag{12}$$

где  $S_{min}$  — минимальная пропускная способность, требуемая для обеспечения данного сервиса стабильной и быстрой связью;

BHSA — занятость часового обслуживания;

PR — уровень проникновения услуги;

PAR — отношение максимальной загруженности радиоканала к средней (выражено в % и соответствует увеличению трафика во время максимального уровня нагрузки);

3600 — значение временного интервала в 1 ч, выраженное в секундах.

Минимальная пропускная способность для каждой предоставляемой мобильной сетью услуги:

$$S_{min} = S_{serav} \times S_{ur} \times V_{BR} \times \left( \frac{1}{1 - BLER} \right), \tag{13}$$

где  $S_{serav}$  — средняя продолжительность услуги;

$S_{ur}$  — коэффициент использования рассматриваемой услуги;

$V_{BR}$  — скорость передачи данных, требуемая для предоставления услуги с заданным качеством;

BLER — вероятность возникновения блоковой ошибки.

Далее согласно рекомендации 3GPPTR 38.306 [6] рассчитывается пропускная способность одной ячейки БС по формуле

$$S_{BS\ max} = 10^{-6} \cdot \sum_{j=1}^J \left[ g^{(j)} \cdot Q_m^{(j)} \cdot f^{(j)} \cdot R_{max} \cdot \frac{N_{PRB}^{BW(j)\mu} \cdot 12}{T_S^\mu} (1 - OH^{(j)}) \right], \quad (14)$$

где  $J$  — количество сегрегированных несущих,  $J_{max} = 16$ , однако в данном случае  $J = 1$ ;

$g^{(j)}$  — потоковое количество MIMO,  $g^{(j)} = 4$ ;

$Q_m^{(j)}$  — порядок для определенного вида модуляции (QPSK:  $Q_m^{(j)} = 2$ , 16-QAM:  $Q_m^{(j)} = 4$ , 64-QAM:  $Q_m^{(j)} = 6$ , 256-QAM:  $Q_m^{(j)} = 8$ );

$f^{(j)}$  — масштабируемый фактор,  $f^{(j)} = 1$ ;

$N_{PRB}^{BW(j)\mu}$  — количество ресурсных блоков, которое зависит от нумерологии  $\mu$  и значения полосы частот канала  $BW(j)$ ;

$R_{max}$  — максимально необходимая скорость кодирования,  $R_{max} = (0,12/0,65/0,85/0,926)$ ;

12 — количество поднесущих, которые приходятся на один ресурсный блок;

$T_S^\mu$  — средняя продолжительность OFDM-символа для определенного  $\mu$  для нормального циклического префикса:  $T_S^\mu = \frac{10^3}{14 \times 2}$ .

$OH^{(j)}$  — доля ресурсов, которые занимают каналы управления,  $OH^{(j)} = 0,14$  [9].

Таблица 6

**Результаты расчета количества базовых станций для густозаселенного и малозаселенного районов**

Количество станций	QPSK	16-QAM	64-QAM	256-QAM
$N_{BS\Gamma}$	963	90	46	32
$N_{BS\ M}$	406	38	20	14

Дальность связи будет определять по формуле

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi N_{BS}}}, \quad (15)$$

где  $S$  — площадь обслуживаемой территории.

Таблица 7

**Рассчитанные данные количества базовых станций и радиуса покрытия для густозаселенного района**

Способ модуляции	$R$ (с учетом канального бюджета), м	$R$ (с учетом трафика), м	$N_{BS}$
QPSK	597,3	26	963
16-QAM	239,5	84	90
64-QAM	116,6	118	46
256-QAM	46,1	141	32

**Рассчитанные данные количества базовых станций  
и радиуса покрытия для малозаселенного района**

Способ модуляции	$R$ (с учетом канального бюджета), м	$R$ (с учетом трафика), м	$N_{BS}$
QPSK	571,2	40	406
16-QAM	249,5	129	38
64-QAM	128,9	178	20
256-QAM	52,4	213	14

Таким образом, согласно таблицам 6—8, на выбранной территории вручную разместили 66 базовых станций, в их числе 46 для густозаселенного района и 20 для малозаселенного. Расстановка представлена на рисунке 1.



Рис. 1. Карта размещения базовых станций

Перед тем как перейти к проектированию сети радиодоступа, требовалось создать карту местности с информацией о высотах рельефа и зданиях. Для этого использовалось программное обеспечение QGIS. В результате работы была создана карта рельефа местности с нанесенными на основе спутниковых снимков зданиями, для всех размещенных объектов были указаны их высоты и типы местности.

Программное обеспечение ICS Telecom использовалось для дальнейшего проектирования сети радиодоступа. Были созданы базовые станции в программном обеспечении в соответствии с заранее подготовленной картой расположения по ГОСТ Р 55897-2013 [10]. Каждая из базовых станций была оснащена тремя секторными антеннами AAU5612, что привело к установке в общей сложности 198 антенных систем. Рисунок 2 содержит результат расчета ослабления на маршруте в соответствии с рекомендациями МСЭ-R P.526-13 [11].

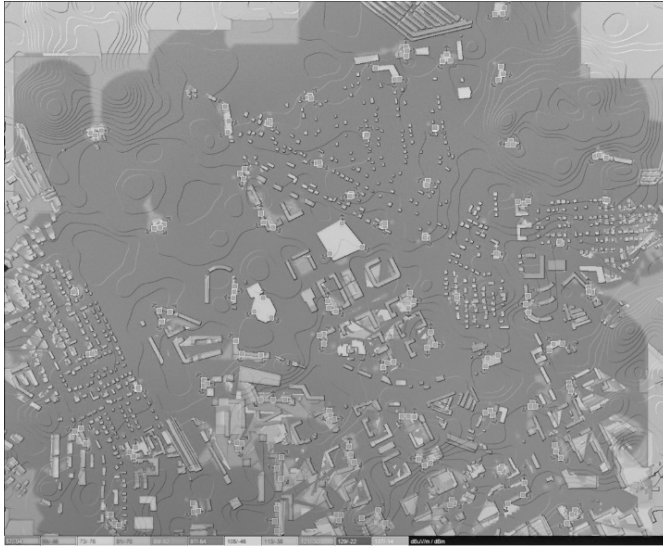


Рис. 2. Карта покрытия по уровню сигнала до оптимизации

Исходя из карты покрытия можно сделать вывод о том, что уровень сигнала высокий, а зона покрытия — качественная. Из-за избыточного уровня мощности требуется оптимизация, включая выборочное отключение антенных систем и встроенную оптимизацию программного обеспечения, которая изменяет угол наклона и высоту подвеса антенн. Результаты оптимизации вследствие изменения высоты подвеса и угла наклона представлены на рисунке 3.

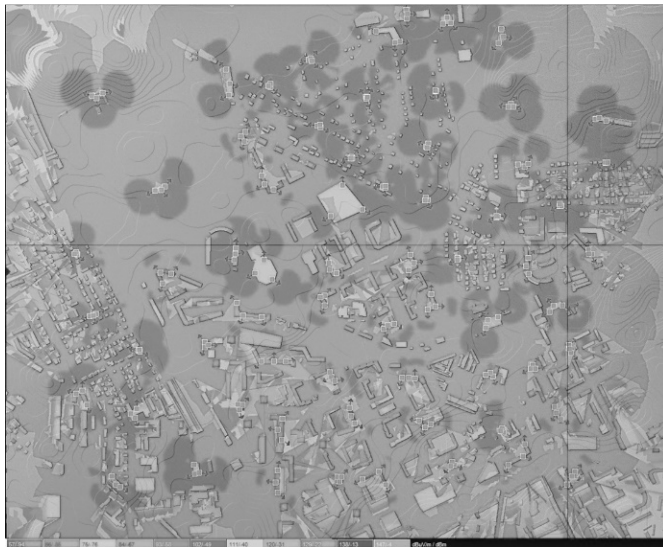


Рис. 3. Карта покрытия по уровню сигнала после изменения высоты подвеса и угла наклона антенн

Количество антенн было сокращено до 156, в то время как зона покрытия и мощность остались на необходимом уровне. Результаты оптимизации в программе приведены на рисунке 4.

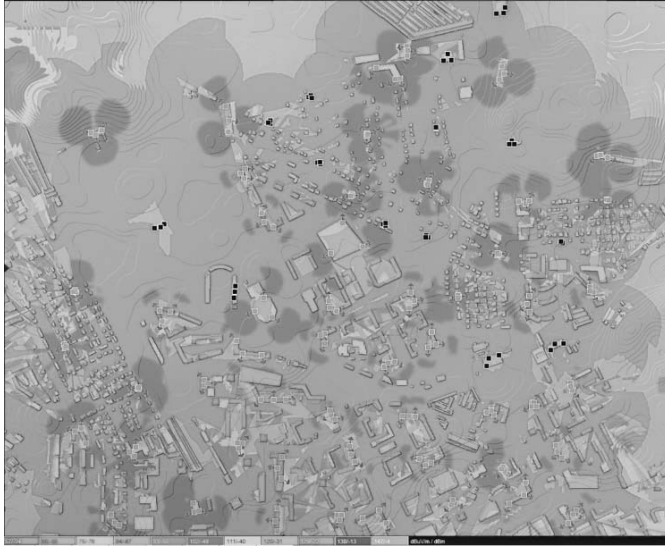


Рис. 4. Карта покрытия по уровню сигнала после оптимизации

С помощью программного обеспечения был проведен анализ вероятности покрытия территории. Вероятность составила не менее 95 %.

Таким образом, для планирования сети выбран стандарт 5G, имеющий высокую пропускную способность и низкую задержку. Для реализации были выбраны частотный диапазон 4,8—4,9 ГГц с рабочей частотой 4,85 ГГц и базовая станция компании Huawei AAU 5612 с активной антенной системой. Оптимальные значения радиуса покрытия были определены на основе бюджета канала и планируемого трафика: значение для густозаселенного района — 118 м с 46 установленными базовыми станциями, а для малозаселенного — 178 м с 20 установленными базовыми станциями. В результате оптимизации расположения базовых станций на проектируемой территории сеть была оптимизирована, количество базовых станций сократилось до 52.

#### Список литературы

1. Молчанов Д. А., Бегишев В. О., Самуйлов К. Е., Кучерявый Е. А. Сеть 5G/6G: архитектура, технологии, методы анализа и расчета. М., 2022.
2. Население Калининградской области. 2023. URL: <http://surl.li/skpph> (дата обращения: 25.03.2024).
3. Tele2 вошел в тройку российских мобильных операторов, обогнав Билайн. 2023 // РИА Новости. URL: <http://surl.li/skphc> (дата обращения: 25.03.2024).
4. Заседание ГКРЧ от 17 марта 2020 г. : протокол № 20-54дсп. URL: <https://clck.ru/34Vxh2> (дата обращения: 29.03.2024).
5. Huawei AAU5612 Technical Specifications. 2020.

6. *Рекомендации 3GPP: 3<sup>rd</sup> Generation Partnership Project; Technical Specification Group SA; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); TS 38.214-g10.*

7. *Тихвинский В. О., Терентьев С. В., Коваль В. А., Девяткин Е. Е. Развитие сетей мобильной связи от 5G Advanced к 6G: проекты, технологии, архитектура : учеб. пособие. М., 2023.*

8. *Рекомендации 3GPP: 3<sup>rd</sup> Generation Partnership Project; Technical Specification Group SA; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); TS 38.901-g10.*

9. *Рекомендации 3GPP: 3<sup>rd</sup> Generation Partnership Project; Technical Specification Group SA; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); TS 38.306-g10.*

10. *ГОСТ Р 55897-2013. Сети подвижной радиосвязи. Зоны обслуживания. Методы расчета.*

11. *Распространение радиоволн за счет дифракции : рекомендация МСЭ-R P.526-13. (11/2013).*

### **Об авторах**

Анастасия Александровна Мохова — магистрант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: mokhova2002@bk.ru

Валерий Иванович Бурмистров — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: VBurmistrov@kantiana.ru

Германа Геннадьевич Ляхов — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: GLyakhov@kantiana.ru

### **The authors**

Anastasia A. Mokhova, Master's student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: mokhova2002@bk.ru

Valery I. Byrmistrov, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: VBurmistrov@kantiana.ru

German G. Lyakhov, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: GLyakhov@kantiana.ru

А. С. Трунин, А. В. Юров

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ И ШЛЕЗИНГЕРА ДЛЯ МАТРИЧНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

*Исследовано преобразование Дарбу для нелинейного уравнения Шрёдингера с некомпактной изогруппой и в общем, матричном случае. Для этого построены и проверены пары Лакса и выписаны обобщенные, неабелевы уравнения типа Риккати. Отдельно проведено рассмотрение редукционных ограничений, как для комплексной, так и для эрмитовой редукции. Построены обобщения солитонов Перегринна для дефокусирующего случая. Показано, что такие решения оказываются сингулярными. Полученные результаты могут быть полезны для дальнейшего изучения нелинейных волновых процессов и их приложений, особенно в задачах, в которых может быть реализован режим медленно меняющейся огибающей. Показано, что, хотя общее редукционное ограничение не выполняется для эрмитовой редукции, можно добиться эрмитовости гамильтониана, получаемого с помощью бинарного преобразования Дарбу.*

*The work investigates the Darboux transformation for the nonlinear Schrödinger equation with a non-compact isogroup and in the general matrix case. For this purpose, Lax pairs are constructed and tested and generalized, non-Abelian equations of Riccati type are written. A separate consideration of reduction restrictions is carried out, both for complex and Hermitian reduction. Generalizations of Peregrine solitons for the defocusing case are constructed. It is shown that such solutions turn out to be singular. The results obtained can be useful for further study of nonlinear wave processes and their applications, especially in problems in which the regime of a slowly changing envelope can be implemented. It is shown that although the general reduction constraint does not hold for the Hermitian reduction, it is possible to ensure that the Hamiltonian obtained using the binary Darboux transformation is Hermitian.*

**Ключевые слова:** преобразование Дарбу, NLS, солитоны, волны-убийцы

**Keywords:** Darboux transform, NLS, solitons, rogue waves

#### Введение

Исследованию нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ), представленного по формуле (1), посвящено чрезвычайно много работ, как математического, так и физического плана.

$$i\Psi_t + \Delta\Psi + 2\kappa|\Psi|^2\Psi = 0. \quad (1)$$

В пределе слабой связи это уравнение появляется практически в любой нерелятивистской полевой теории. Еще более универсальный спо-

соб получить НУШ — использовать метод медленно меняющейся огибающей. С точки зрения аналитического подхода, все фундаментальные успехи связаны с одномерным случаем уравнения (1). Так, при наличии  $U(1)$ -симметрии НУШ оказывается полностью интегрируемой гамильтоновой системой, причем не только на классическом [1; 2], но и на квантовом уровнях [3]. В последнем случае НУШ описывает газ бозе-частиц с  $\delta$ -образным парным взаимодействием. Техника вывода (1) из соответствующего уравнения Шрёдингера использует метод самосогласованного поля, причем симметричная многочастичная волновая функция представляется в виде, полностью факторизованном по одночастичным и нормированным состояниям. Важно отметить, что притягивающий  $\delta$ -образный потенциал приводит к фокусирующему (положительный знак перед нелинейностью), а отталкивающий — к дефокусирующему НУШ. Соответственно, в первом случае обычно регулярные решения (солитоны), а во втором — решения с особенностями. Свойства такого газа были изучены в работах [4—6], где найдены основное состояние и спектр возбуждений. Отметим также, что (1) описывает в непрерывном пределе целый класс физических явлений: от волн на воде и спиновых волн в ферромагнетиках до лазерных пучков в волокнистых световодах [7—10].

В настоящей работе мы рассмотрим более сложный вариант НУШ с некомпактной псевдоунитарной изогруппой  $U(p, q)$ , сохраняющей свойство интегрируемости [11—14].

### Преобразование Дарбу для матричного нелинейного уравнения Шрёдингера

Определим матрицы:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 I_m & 0 \\ 0 & \mu_2 I_n \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & R \\ Q & 0 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & \dots & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{m1} & \dots & \dots & r_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1); \quad (4)$$

$$m + n = N; \quad (5)$$

$$B \equiv \Gamma_{m,n}(iU^2 - U_x), \quad \Gamma_{m,n} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}; \quad (6)$$

$$\mu_2 - \mu_1 = a. \quad (7)$$

LA-пара

$$\begin{cases} \psi_t = ia\Sigma\psi\Lambda^2 - iaU\psi\Lambda + B\psi \\ \psi_x = -i\Sigma\psi\Lambda + iU\psi \end{cases}. \quad (8)$$

Условие совместимости дает:

$$\begin{cases} iR_t + R_{xx} + 2RQR = 0 \\ -iQ_t + Q_{xx} + 2QRQ = 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Для преобразования Дарбу выбираем:

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = -1, a = -2. \quad (10)$$

При этом  $\Gamma_{m,n} = \Sigma$ .

Введем матрицу  $\tau$ :

$$\tau \equiv \varphi\Lambda_1\varphi^{-1}. \quad (11)$$

$\tau$  удовлетворяет уравнениям

$$\tau_t = -2i[\Sigma, \tau]\tau^2 - 2i[\tau, U]\tau + [B, \tau]; \quad (12)$$

$$\tau_x = i[\tau, \Sigma]\tau + i[U, \tau]; \quad (13)$$

$$\begin{cases} \Psi^{(1)} \equiv \Psi\Lambda - \tau\Psi \\ U^{(1)} = U + [\tau, \Sigma] \end{cases}. \quad (14)$$

В частности,

$$B^{(1)} = B - 2i(\tau U - U\tau - \tau\Sigma\tau + \Sigma\tau^2). \quad (15)$$

$\tau$  представим в виде

$$\tau = \tau_D + \tau_F; \quad (16)$$

$$\tau_D = \begin{pmatrix} m \times m & 0 \\ 0 & n \times n \end{pmatrix}, \quad \tau_F = \begin{pmatrix} 0 & S \\ P & 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где  $S$  аналогичен  $R$ , а  $P$  —  $Q$ .

Рассмотрим эрмитову редукцию:

$$Q = R^+ \Rightarrow U = U^+. \quad (18)$$

Тогда имеем редукционное отражение

$$\tau_F^+ = -\tau_F \Rightarrow S = -P^+. \quad (19)$$

Редукция на  $U(1,1) \otimes U(1,1)$  достигается выбором  $Q$  —  $(2 \times 2)$  матрицы. При этом следует воспользоваться комплексной редукцией:

$$R = Q^*. \quad (20)$$

При этом по-прежнему

$$U^+ = U. \quad (21)$$

Для выполнения редукционного ограничения следует выбрать

$$\Psi = \begin{pmatrix} +\Psi_2^* & \Psi_1^* \\ -\Psi_1 & \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_1^* \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где  $\Psi_k$  и  $\Lambda_1$  —  $(2 \times 2)$  матрицы. Тогда

$$Q^{(1)} = Q^{(0)} + 2(\Psi_2 \Lambda_1^* \xi_1 - \Psi_1 \Lambda_1 \xi_2), \quad (23)$$

$$\xi_1 = (\Psi_1^* + \Psi_2^* \Psi_1^{-1} \Psi_2)^{-1}, \quad (24)$$

$$\xi_2 = (\Psi_2^* + \Psi_1^* \Psi_2^{-1} \Psi_1)^{-1}. \quad (25)$$

$Q$  удовлетворяет уравнению

$$-iQ_t + Q_{xx} + 2QQ^*Q = 0. \quad (26)$$

Гамильтониан имеет вид

$$H = T_r \int dx (Q_x^* Q_x - Q^* Q Q^* Q). \quad (27)$$

Он будет эрмитов, если  $Q$  — симметричная матрица, то

$$Q^T = Q. \quad (28)$$

Это является недостатком. С другой стороны, гамильтониан с — число  $\Rightarrow H^* = H$ , то есть энергия вещественна. Тем не менее это не есть  $U(1,1) \otimes U(1,1)$ , так как заряды

$$S_1 \equiv \int dx RQ, \quad (29)$$

$$S_2 \equiv \int dx RQ^* \quad (30)$$

комплексно-сопряжены, то есть  $S_1^* = S_2$ , а должно быть

$$\sigma_3 S_1 \sigma_3 = S_1, \quad (31)$$

$$\sigma_3 S_2 \sigma_3 = S_2. \quad (32)$$

Это соотношение, определяющее  $U(1,1)$ . Этого можно добиться, накладывая 2-е редукционное ограничение:

$$Q^T = \sigma_3 Q \sigma_3. \quad (33)$$

Для решений, построенных на нулевом фоне, это дает условие:

$$\xi_1^T \Lambda_1^+ \Psi_2^T - \xi_2^T \Lambda_1^+ \Psi_1^T = \sigma_3 \Psi_2 \Lambda_1^* \xi_1 \sigma_3 - \sigma_3 \Psi_1 \Lambda_1 \xi_2 \sigma_3, \quad (34)$$

$$d\Theta[\phi, \Psi] = dx \phi \Sigma \Psi + 2dt \{i(\phi_x \Psi - \phi \Psi_x) + \phi U \Psi\}, \quad (35)$$

$$\phi \rightarrow \phi^{(1)} = \Theta \Psi^{-1}. \quad (36)$$

$$U[+1, -1] = U + 2i[\phi \Theta^{-1} \Psi, \Sigma]. \quad (37)$$

Применяя полученные результаты для изучения магнитных возмущений ( $\infty |\psi^{(2)}|^2$ ) в рамках континуального «аналога» модели Хаббарда

(система  $U(1,1)$ ), нужно иметь в виду, что основное состояние цепочки антиферромагнитно:  $\psi^{(2)}(\infty) = 0$  [ ]. В связи с этой задачей представляет интерес изучение процесса столкновения 2D-солитонов.

### Дефокусирующее НУШ

Дефокусирующее НУШ имеет вид

$$\begin{cases} \Psi_x = i\sigma_3 \Psi \Lambda + U \Psi \\ \Psi_t = 2i\sigma_3 \Psi \Lambda^2 + 2U \Psi \Lambda + V \Psi, \end{cases} \quad (38)$$

где

$$U = i \begin{pmatrix} 0 & -\bar{r} \\ r & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} i|r|^2 & -\bar{r}_x \\ -\bar{r}_x & -i|r|^2 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$V_F = -i\sigma_3 U_x, \quad V_D = -i\sigma_3 U^2, \quad (40)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$U^+ = U, \quad V_F^+ = V, \quad V_0^+ = -V_0, \quad (42)$$

$$ir_t + r_{xx} - 2r|r|^2 = 0, \quad (43)$$

$$\tau = \phi \Lambda_1 \phi^{-1}, \quad (44)$$

$$\begin{cases} \tau_x = i[\sigma_3, \tau] \tau + [U, \tau] \\ \tau_t = 2i[\sigma_3, \tau] \tau^2 + 2[U, \tau] \tau + [V, \tau] \tau \end{cases} \quad (45)$$

Редукционное ограничение:

$$\tau_F^+ = \tau_F \Rightarrow \bar{\tau}_{12} = \tau_{21}. \quad (46)$$

Преобразование Дарбу:

$$\begin{cases} \Psi^{(1)} = \Psi \Lambda - \tau \Psi \\ U^{(1)} = U + i[\sigma_3, \tau] \\ V^{(1)} = V + 2[U, \tau] + 2i[\sigma_3, \tau] \tau \end{cases} \quad (47)$$

При учете RR

$$r^{(1)} = r - 2\tau_{21}, \quad (48)$$

$$\Psi_1 = \kappa \bar{\phi}_2, \quad \Psi_2 = \frac{1}{\kappa} \bar{\phi}_1 \Rightarrow \text{Im } \kappa = 0, \quad (49)$$

$$r^{(1)} = r - \frac{2\kappa(\lambda - \bar{\lambda})\phi_1\phi_2}{\kappa^2|\phi_2|^2 - |\phi_1|^2}. \quad (50)$$

$\phi_{1,2}$  ищутся из системы уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_{1x} = -i\lambda\varphi_1 + i\kappa r\bar{\varphi}_2 \\ \varphi_{2x} = -i\bar{\lambda}\varphi_2 + \frac{i}{\kappa}r\bar{\varphi}_1 \\ \varphi_{1t} = -2i\lambda^2\varphi_1 + 2i\lambda\kappa r\bar{\varphi}_2 - \kappa r_x\bar{\varphi}_2 - i|r|^2\varphi_1 \\ \varphi_{2t} = -2i\bar{\lambda}^2\varphi_2 + 2i\bar{\lambda}\frac{1}{\kappa}r\bar{\varphi}_1 - \frac{1}{\kappa}r_x\bar{\varphi}_1 - i|r|^2\varphi_2 \end{cases} \quad (51)$$

Система без редукции:

$$\Psi_{k,x} = i\lambda_k\Psi_k - ir\bar{\varphi}_k, \quad (52)$$

$$\varphi_{k,x} = -i\bar{\lambda}_k\varphi_k + ir\Psi_k, \quad (53)$$

$$\Psi_{k,t} = 2i\lambda_k^2\Psi_k - 2i\lambda_k\varphi_k\bar{r} + i|r|^2\Psi_k - \bar{r}_x\varphi_k, \quad (54)$$

$$\varphi_{k,t} = -2i\bar{\lambda}_k^2\varphi_k + 2ir\lambda_k\Psi_k - i|r|^2\varphi_k - r_x\Psi_k. \quad (55)$$

Другая редукция:

$$\Psi_k = \bar{\varphi}_k. \quad (56)$$

При этом

$$\begin{cases} \varphi_{k,x} = -i\bar{\lambda}_k\varphi_k + ir\bar{\varphi}_k \\ \varphi_{k,t} = -2i\bar{\lambda}_k^2\varphi_k + 2i\bar{\lambda}_k r\bar{\varphi}_k - i|r|^2\varphi_k - r_x\bar{\varphi}_k \end{cases}, \quad (57)$$

$$\tau_{21} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\varphi_1\bar{\varphi}_2}{\varphi_1\varphi_2 - \bar{\varphi}_1\bar{\varphi}_2}, \quad (58)$$

$$\text{Im}(\lambda_1, \lambda_2) = 0. \quad (59)$$

На фоне плоской волны  $Ae^{is}$  можно взять решения

$$\varphi_k = e^{is/2}V_k, \quad (60)$$

$$k = 1, 2, \quad (61)$$

где

$$\begin{cases} V_1 = 2Amx + 4Am(A-a)t + C_1 + im \\ V_2 = n + i(2Anx - 4An(a+A)t + C_2) \end{cases}. \quad (62)$$

Все выражения вещественны, получаем следующее:

$$\lambda_1 = A - \frac{a}{2}, \quad \lambda_2 = -\left(\frac{a}{2} + A\right); \quad (63)$$

$$s = ax - (a^2 + 2A^2)t, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 2A; \quad (64)$$

$$r^{(1)} = Ae^{is} \frac{3mn + V_{1R}V_{2I} + 2i(mV_{2I} - nV_{1R})}{mn - V_{1R}V_{2I}}; \quad (65)$$

$$V_{1R} = 2Am(\xi + 2A\eta) + C_1, \quad V_{2I} = 2An(\xi - 2A\eta) + C_2, \quad (66)$$

$$a = 0, \quad s = -2A^2\eta. \quad (67)$$

Если  $C_1 = C_{12} = 0$ , то

$$r^{(1)} = Ae^{is} \frac{3 + 4A^2(\xi^2 - 4A^2\eta^2) - i16A^2\eta}{1 - 4A^2(\xi^2 - 4A^2\eta^2)}. \quad (68)$$

Выбирая  $s = -\frac{2A^2}{\alpha}$ , имеем для  $|\varphi^4|$

$$Ae^{-\frac{i}{2t}(1+\alpha^2)t}, \quad (69)$$

$$c = \frac{1}{2}(1 + \alpha^2)(\alpha^2 - 8A^2), \quad \lambda = 2(1 + \alpha^2), \quad (70)$$

$$\langle \psi \rangle = \pm \frac{\sqrt{8A^2 - \alpha^2}}{\sqrt{2\alpha}}. \quad (71)$$

Если выбрать  $\langle \psi \rangle = \pm A$ , то

$$\lambda = 2(1 + 4A^2), \quad c = -\lambda A^2, \quad \alpha = \pm 2A. \quad (72)$$

То есть масса растёт  $|c|$  с ростом амплитуды (тоже и с  $\lambda$ ).

$$|r^{(1)}|^2 = A^2 + 8A^2 \frac{1 + 4A^2(\xi^2 + 28A^2\eta^2)}{[1 - 4A^2(\xi^2 - 4A^2\eta^2)]^2}. \quad (73)$$

### Заключение

В данной работе показано, что нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) с некомпактной изогруппой может быть представлено как условие совместности двух линейных уравнений, аналогично обычному НУШ. Более того, это уравнение допускает матричные преобразования Дарбу, которые коммутируют друг с другом. Важным аспектом является вопрос о редукционных ограничениях и их сохранении при преобразовании Дарбу. Мы построили такое ограничение, однако гамильтониан при этом оказывается неэрмитовым, хотя энергия остается вещественной величиной. Эрмитовости можно достичь, используя редукционное ограничение, наложенное на бинарное преобразование Дарбу. Наконец, исследованы обобщения солитонов Перегринна для дефокусирующего случая. Как и ожидалось, эти решения оказываются сингулярными, что ограничивает их применение во времени. Полученные результаты открывают новые перспективы для дальнейшего изучения нелинейных волновых процессов и их приложений.

### Список и литературы

1. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной самомодуляции волн в нелинейных средах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1971. № 61 (1). С. 118—134.
2. Захаров В. Е., Шабат А. Б. О взаимодействии солитонов в устойчивой среде // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1974. № 64 (5). С. 1627—1639.
3. Корепин В. Е., Фаддеев Л. Д. Квантование солитонов // Физика элементарных частиц : материалы XII Зимней школы ЛИЯФ. Л., 1977. С. 130—146.

4. *Склякин Е. К.* Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. Ч. III // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1980. Т. 95. С. 55.
5. *Березин Ф. А., Похил Г. П., Финкельберг В. М.* Уравнение Шрёдингера для системы одномерных частиц с точечным взаимодействием // Вестник МГУ. Сер. I: Математика. Механика. 1964. № 1. С. 21—28.
6. *Lieb E. H., Liniger W.* Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I: The General Solution and the Ground State // Phys. Rev. 1963. № 130. P. 1605.
7. *Haar D. ter.* Nonlinear Propagation Behaviour in Optical and Other Physical Systems // Oxford DTP. 1977. Ref. 54/77.
8. *Манаков С. В.* К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн // ЖЭТФ. 1973. № 65 (2). С. 505.
9. *Yang C. N.* Some Exact Results for the Many-Body Problem in one Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction // Phys. Rev. Lett. 1967. № 19. P. 1312.
10. *Кулиш П. П.* Обобщенный анзац Бете и квантовый метод обратной задачи. Л., 1979. С. 16.
11. *Lindner U., Fedyanin V. K.* Solitons in a One-Dimensional Modified Hubbard Model // Phys. Stat. Sol. (b). 1978. № 89. P. 123.
12. *Makhankov V. G., Makhaldiani N. V., Pashaev O. K.* On the integrability and isotopic structure of the one-dimensional Hubbard model in the long wave approximation // Phys. Lett. A. 1981. № 81. P. 156.
13. *Makhankov V. G., Pashaev O. K.* A new integrable model of quantum field theory in the state space with indefinite metric. Preprint E2-81-264. Dubna, 1981.
14. *Makhankov V. G., Pashaev O. K.* Non-linear effects in quasi-one-dimensional models of condensed matter theory. Preprint E2-81-540. Dubna, 1981.

#### Об авторах

Артём Сергеевич Трунин — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: [deletednyas@live.ru](mailto:deletednyas@live.ru)

Артём Валерианович Юров — д-р физ.-мат. наук, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: [AIUrov@kantiana.ru](mailto:AIUrov@kantiana.ru)

#### The authors

Artyom S. Trunin, PhD student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: [deletednyas@live.ru](mailto:deletednyas@live.ru)

Prof. Artyom V. Yurov, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: [AIUrov@kantiana.ru](mailto:AIUrov@kantiana.ru)

**Г. В. Абраменков, П. А. Дронов, С. Ю. Приданников,  
А. Н. Нестеренко, О. В. Толстель, Д. Б. Ахметов,  
Д. С. Васильев, Е. С. Степанова**

### **ЭЛЕКТРОРАКЕТНЫЕ ДВИГАТЕЛЬНЫЕ УСТАНОВКИ С ТЯГОЙ ОТ 4 ДО 18 МН ДЛЯ МАЛЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

*Описаны три электроракетные двигательные установки на ксеноне, работающие в диапазоне значений тяги от 4 до 18 миллиньютон. Эти установки имеют малые габаритные размеры и потребляемую электрическую мощность, что позволяет использовать их в космических аппаратах класса Cubesat (далее — кубсат) и специализированных микроспутниках массой до 100 кг. Рассмотрено применение таких установок для околоземных миссий в составе кубсатов средних и максимальных размеров и микроспутника для полета к орбите Марса. Приводятся фотографии и 3D-модели внешнего вида двигателей и арматуры установок, значения тяги, удельного импульса, разрядного тока, напряжения и разрядной мощности. Представлены зависимости параметров двигателя одной из установок от напряжения. Для двух других установок показано их расположение в составе космического аппарата, представлены 3D-модели элементов полезной нагрузки и фотографии камер дистанционного зондирования Земли, доступных к использованию в таких аппаратах. Приводятся данные по их разрешению (в метрах). Показан график рассчитанной зависимости срока активного существования аппарата от высоты орбиты для одной из установок. Делаются выводы о целесообразности использования электроракетных двигателей различной разрядной мощности для различных типоразмеров и конструкций малых аппаратов.*

*The article describes three xenon electric rocket propulsion systems operating in the thrust range from 4 to 18 millinewtons. These installations have small overall dimensions and electrical power consumption, which allows them to be used in Cubesat-class spacecraft (hereinafter referred to as cubesats) and specialized microsattellites weighing from 100 kg. The use of such installations for near-Earth missions as part of cubesats of medium and maximum sizes and a microsattelite for flight to Mars orbit is considered. Photographs and 3D models of the appearance of engines and installation fittings, thrust values, specific impulse, discharge current, voltage and discharge power are provided. The dependences of the motor parameters of one of the installations on voltage are presented. For the other two installations, their location within the spacecraft is shown, 3D models of payload elements and photographs of Earth remote sensing cameras available for use in such vehicles are presented. Data are given on their resolution in meters per pixel. Shown is a graph of the calculated dependence of the active life of the device on the*

*orbital altitude for one of the installations. Conclusions are drawn about the feasibility of using electric rocket engines of various discharge powers for various sizes and designs of small devices.*

**Ключевые слова:** стационарный плазменный двигатель, двигательная установка, кубсат, детали и сборочные единицы, ксенон, срок активного существования, тяга, удельный импульс, разрядная мощность

**Keywords:** hall thruster, propulsion system, cubesat, parts and assembly units, xenon, active life, thrust, specific impulse, electric discharge power

## Введение

Рассматриваются конструкции трех двигательных установок (ДУ) на основе электроракетных двигателей (ЭРД) малой тяги (МТ). Эти ДУ используют стационарные плазменные двигатели (СПД), которые работают на инертном рабочем теле — газе ксенон. Установки, описанные в первых двух частях, рассматриваются для использования в космических аппаратах класса кубсат. В кубсатах применяется название 1 юнит (1U) элемента объема габаритами  $10 \times 10 \times 10$  см. Из-за малых размеров и энергетики кубсатов габаритов 1U, 3U и 6U СПД для них неэффективны. Ниже рассматриваются ДУ для кубсатов объемом 16U, 27U и 32U. Показаны 3D-модели деталей и сборочных единиц (ДСЕ), входящих в состав ДУ. В первой части описывается ДУ на основе нового двигателя Д-18, имеющая минимальные размеры и энергопотребление и занимающая общий объем 4U у кубсата общей размерностью 16U. Исходя из требования по габаритам ДУ определен суммарный объем баллонов высокого давления, содержащих ксенон. Исходя из объема баллонов ДУ произведен расчет суммарного импульса, на основе которого находится суммарное время работы ДУ при полной заправке. Во второй части рассматривается проектирование кубсата размером 27U для дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) и моделирование ДУ для возможности максимально долгой работы на орбите предельно низкой высоты — 300 км. Приводятся параметры камер для ДЗЗ. Делается вывод о целесообразности дальнейшего рассмотрения максимально возможного формата кубсата 32U с ДУ, основанной на двигателе СПД-50, имеющем подтвержденную летную историю. В третьей части рассматривается ДУ для малого аппарата, направляемого к Марсу: представлены состав и 3D-модели ее ДСЕ и общей конструкции аппарата.

### 1. Двигательная установка на базе двигателя Д-18 для кубсата 16U

Рост применения малых космических аппаратов класса Cubesat [1] привел к необходимости разработки «микродвигателей» для них, основанных на различных физических принципах. Стационарные плазменные двигатели (СПД) эффективно используются в двигательных установках для космических аппаратов массой от 200 кг и выше. Однако при

попытках создать подобные двигатели для кубсатов 3U и 6U возникли проблемы, обусловленные следующими причинами: недостаток энергетики аппарата вследствие малых размеров его солнечной батареи (СБ), недостаток места под блоки ДУ и малый КПД двигателя СПД при данных типоразмерах.

В итоге удалось создать холловский двигатель Д-18, работающий на мощности 120...150 Вт [2]. Подобные двигатели были предложены А. В. Жариновым еще в конце 1950-х годов [3], однако из-за малого ресурса широкого практического применения не получили. В отличие от классического СПД, в их конструкции нет керамической разрядной камеры. Для данного конкретного типоразмера кубсата и отсутствия требования большого ресурса этот вид двигателя оказался подходящим.

Ниже на рисунке 1 представлен общий вид двигателя Д-18 и его параметры.



Рис. 1. Общий вид и параметры двигателя Д-18

На рисунке 2 представлены экспериментальные зависимости характеристик двигателя при различных значениях анодного расхода ксенона  $G_a$  от разрядного напряжения  $U_p$ . На всех графиках пунктиром показано значение рабочего напряжения двигателя (150 В).

Общим требованием к ДУ, включающей Д-18, является требование по габаритам — не превышать 4U. В этом случае существующие проекты Кубсатов размерностью 12U, полностью укомплектованные необходимым оборудованием (бортовыми системами и полезной нагрузкой), получив ДУ, не превысят оптимального габарита 16U, для которого сейчас существуют пусковые контейнеры [4].

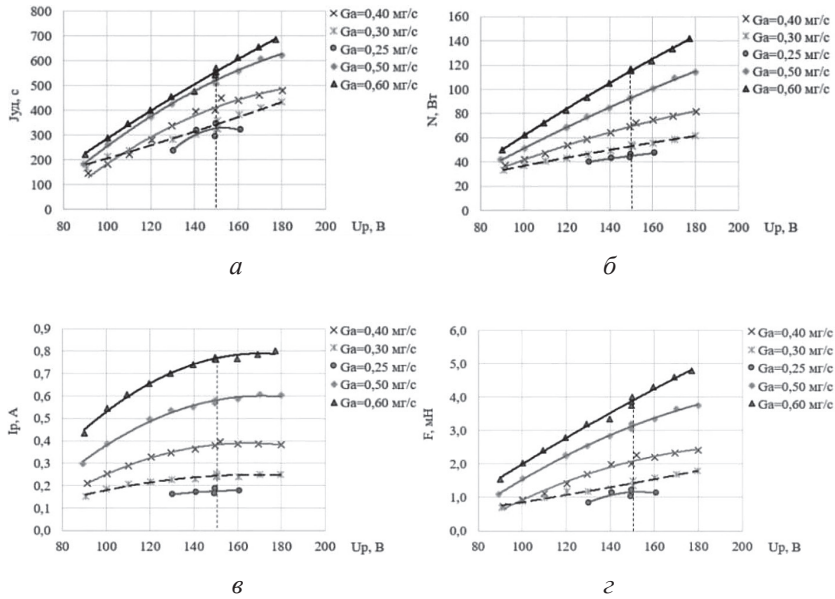


Рис. 2. Графики зависимости параметров двигателя от напряжения при разном анодном расходе ксенона: *а* — разрядного тока  $I_p$ ; *б* — силы тяги  $F$ ; *в* — удельного импульса  $I_{уд}$ ; *г* — разрядной мощности  $N$

Такая двигательная установка, схема которой представлена на рисунке 3, должна содержать три основные части: систему хранения ксенона (СХК) (1), блок подачи ксенона (БПК) (2), систему преобразования и управления (СПУ) (3). В СХК входят несколько (в данном случае 3) баллонов высокого давления (4) и заправочная горловина (5). БПК включает клапан высокого давления (6), редуктор (7), клапан низкого давления (8), термодроссель (9), катодный (10) и анодный (11) жиклеры. Также на схеме представлены два основных элемента двигателя — катод-компенсатор (12) и анодный блок (13).

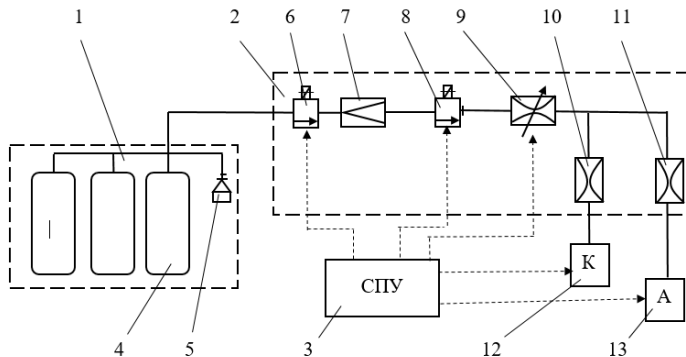


Рис. 3. Общая схема двигательной установки

Конструктивное исполнение ДУ с учетом требования нахождения внутри корпуса космического аппарата привело к компоновке, представленной на рисунке 4.

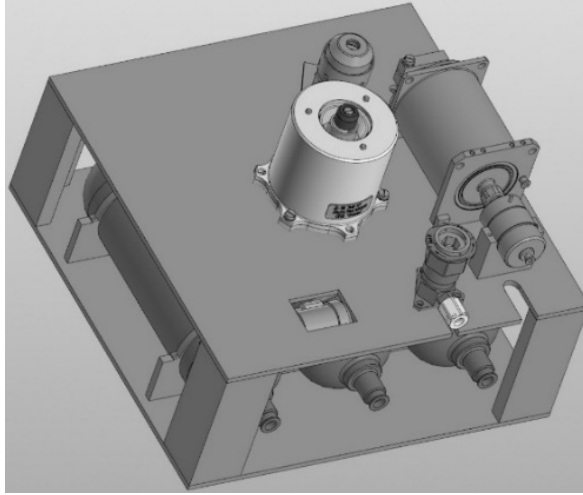


Рис. 4. Компоновка двигательной установки КА на базе двигателя Д-18

В ДУ использованы композитные баллоны высокого давления объемом 0,21 л. Такие баллоны способны выдерживать высокое давление заправляемого ксенона, которое обеспечивает так называемый «коэффициент складирования», равный 2. Это значит, что плотность заправленного ксенона может достигать  $\rho = 2$  кг/л.

Зная объем трех баллонов  $V = 0,63$  л, можем рассчитать массу заправленного газа:

$$M_{Xe} = V \cdot \rho = 0,63 \text{ л} \cdot 2,0 \text{ кг/л} = 1,26 \text{ кг}$$

и суммарный импульс двигательной установки:

$$P_{\text{сум}} = M_{Xe} \cdot J_{\text{уд}} = 1,26 \text{ кг} \cdot 5390 \text{ м/с} = 6791 \text{ Н} \cdot \text{с} = 6,69 \text{ кН} \cdot \text{с},$$

где  $J_{\text{уд}}$  — удельный импульс тяги, измеряемый в с либо в м/с  $\cdot 9,8$ .

При тяге двигателя  $F = 4,0$  мН, суммарное время работы такой ДУ составит

$$T_p = \frac{P_{\text{сум}}}{F} = \frac{6791}{4 \cdot 10^{-3}} = 1,697 \cdot 10^6 \text{ с} = 471,6 \text{ ч}.$$

Таким образом, такая ДУ для спутника формата 16U с характерными размерами  $266 \times 266 \times 454$  см и массой до 38 кг [4] обеспечит приращение характеристической скорости  $\Delta V = 182$  м/с, что позволит осуществлять, во-первых, первоначальное разведение кубсатов по местам распределения по траектории орбиты («фазирование»), во-вторых, корректировку орбиты в ходе САС, которая будет компенсировать аэродинамические потери, и, в-третьих, свод с орбиты в конце САС в плотные слои атмосферы для его сгорания.

## 2. Проектирование кубсата 27...32U с двигательной установкой большого суммарного импульса

В настоящий момент на орбите успешно работают кубсаты производства компании *SputniX*, осуществляющие дистанционное зондирование Земли (ДЗЗ): Зоркий-1 размером 6U, запущенный 22 марта 2021 года [5], и Зоркий-2М размером 12U, запущенный 27 июня 2023 года [6; 7]. Они оснащены камерами производства компании «Лептон» [8]: монохромной ОЭК-803113П массой 2,7 кг с разрешением до 6,5 м и мультиспектральной ОЭК-106038, имеющей большие размеры, массу 12 кг и разрешение 2,75 м. Такие камеры изображены на рисунке 5: сверху — сечение, позволяющее видеть оптическую схему Ричи — Кретьена, снизу — полный вид.

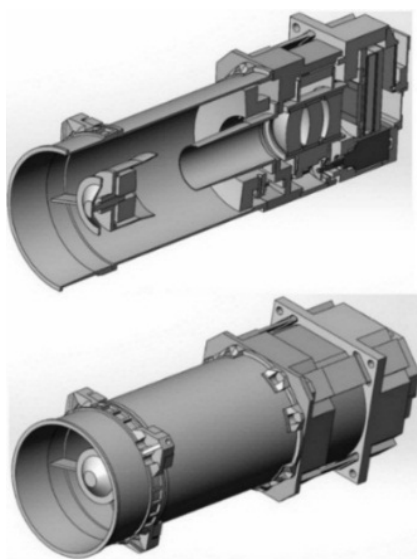


Рис. 5. Камеры компании «Лептон»

В кубсате формата 12U камера ОЭК-106038 занимает почти все место. Для установки минимальной ДУ, описанной выше, требуется еще 4U, что приводит к размеру аппарата 16U.

В статье [1] упомянуты перспективные размеры кубсатов 24U и 27U. Также существует максимальный упоминаемый на сегодня — 32U. Появление кубсатов все больших размеров подтверждается общим трендом их развития — типоразмер 32U имеет габариты  $226 \times 454 \times 454$  см и максимальную массу свыше 60 кг.

В статье [1] такие аппараты предлагаются как «самая легкая точка входа для дальних миссий». Ниже рассмотрены варианты ДУ для таких кубсатов исходя из двух задач для околоземных миссий: 1) — увеличение суммарного импульса ДУ для увеличения срока активного существования спутника ДЗЗ на сверхнизких орбитах; 2) — увеличение тяги и удельного импульса ДУ для увеличения массы полезной нагрузки кубсата максимальных габаритов.

Для проекта ДУ кубсата типоразмера 27U с большим суммарным импульсом рассмотрен двигатель Плас-34, находящийся на данный момент в стадии инженерной модели [9], представленный на рисунке 6. Рассматривалась его работа на мощности 180 Вт.



Напряжение разряда, В	180
Ток разряда, А	1,0
Мощность разряда, Вт	180
Тяга, мН	9,8
Удельный импульс тяги, с	700
Масса, кг	1,1
Габаритные размеры, мм	100x90x85

Рис. 6. Внешний вид и основные характеристики двигателя Плас-34

Нами разработана модель кубсата 27U, представленная на рисунке 7. Она включает в себя ДУ, содержащую двигатель Плас-34, блок подачи ксенона, габаритный макет СПУ и 2 баллона с ксеноном с общей массой заправки 5,3 кг.

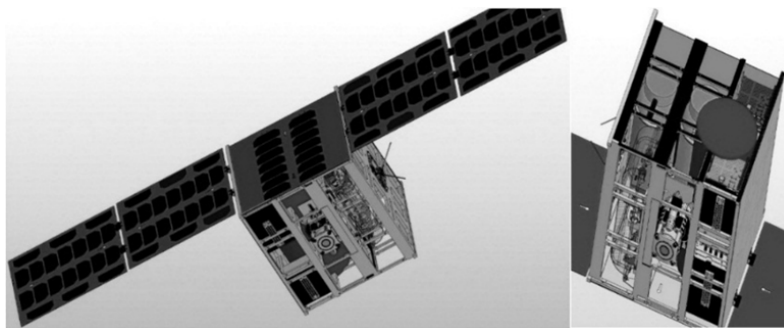


Рис. 7. Разработанная модель кубсата 27U с двигательной установкой

Также использованы массо-габаритные модели элементов спутника — блока гиродинов (вращающихся инерциальных устройств — двухстепенных управляющих силовых гироскопов, применяемых для высокоточной ориентации и стабилизации космических аппаратов), электронных плат системы управления спутника, ее системы электрического преобразования и связи, антенны, панели солнечных батарей.

В качестве камеры ДЗЗ смоделирован габаритный макет вышеупомянутой ОЭК-106038 массой 12 кг. Как видно из правой части рисунка 7, возле камеры ДЗЗ достаточно свободного места для размещения всех остальных элементов.

Большинство моделей ДСЕ представлено на рисунке 8.

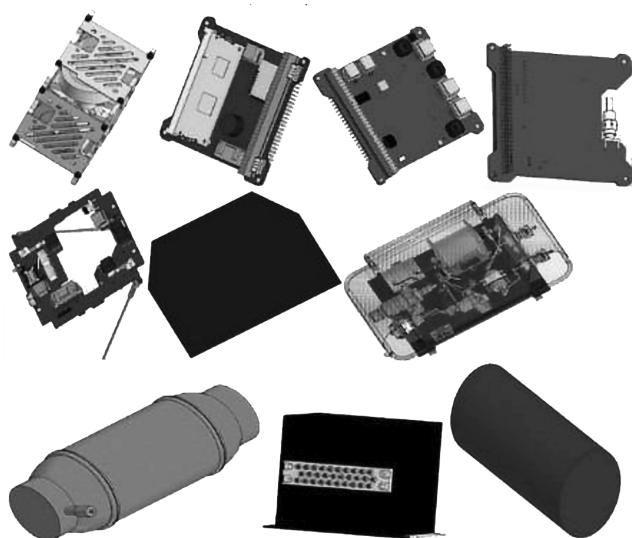


Рис. 8. Детали и сборочные единицы двигательной установки

Было рассчитано распределение сил аэродинамического торможения на аппарат такого размера в зависимости от высоты орбиты. Исходя из действия этих сил и работы ДУ, на их компенсацию авторами рассчитан и построен график зависимости срока САС от высоты орбиты (рис. 9).

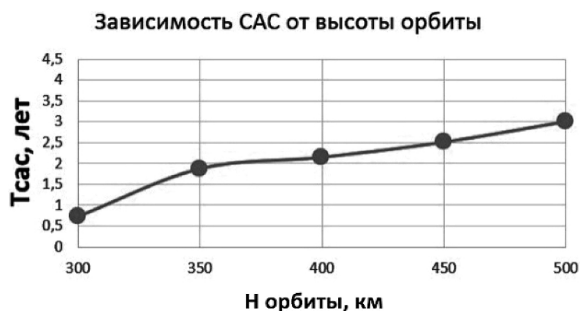


Рис. 9. Полученный график зависимости срока активного существования кубсата размера 3U от высоты орбиты

Таким образом, вышеописанный спутник может изначально находиться на круговой орбите высотой 500 км. При этом разрешение камеры составит 2,75 м. В случае возникновения необходимости мониторить объекты более подробно, с помощью его ДУ он может быть переведен на орбиту с высотой 300 км от поверхности Земли, что даст увеличение разрешения наблюдаемых камерой объектов до 1,65 м. Насколько важным может быть такое снижение, показывает попытка SpaceX получить разрешение на понижение орбиты своих спутников с 550 до 350 км, в котором ей было отказано [10]. На этой орбите спутник сможет находиться до 9 месяцев. Расчет производился для кубической формы аппарата. При создании обтекателя раскрывающейся конструкции САС увеличится.

Рассмотрим увеличение массы полезной нагрузки спутника. Например, в [8] указана разрабатываемая компанией «Лептон» в настоящее время камера ДЗЗ ОЭК-111043. Камера заявлена как панхроматическая, требующая высоту орбиты 400 км, с разрешением 1,0 м. В случае возможности ее установки на кубсат формата 32U (а именно так заявлено в [8]) будет создан уникальный по соотношению цены и качества аппарат ДЗЗ. Аналогичный проект сейчас будет реализовывать Илон Маск для Пентагона — большая группировка малых спутников на орбите высотой 300 км [11]. Такой аппарат может также нести иную полезную нагрузку, отличную от ДЗЗ. Для него предлагается ДУ на основе двигателя СПД-50 [9], имеющего летную историю и подтвержденный ресурс 1200 ч. Основные характеристики такого двигателя представлены на рисунке 10. Внешний вид СПД-50 и SPT-50M одинаков.



Параметр	СПД-50	SPT-50M
Напряжение разряда, В	180	300
Ток разряда, А	1,25	1,0
Мощность разряда, Вт	225	300
Тяга, мН	14	18
Удельный импульс тяги, с	877	1275
Масса, кг	1,23	1,32
Ресурс, ч	1200	5000

Рис. 10. Двигатели СПД-50 и SPT-50M: внешний вид и характеристики

Оптимальный режим работы достигается при потребляемой мощности 225 Вт. Предполагается, что большие габариты СБ аппарата 32U и большой запас его аккумуляторов обеспечат двигателю такую энергетику.

Таким образом, в кубсатах формата 16...32U для создания многоспутниковых околоземных группировок, требующих корректировок их орбит, могут применяться ЭРД с мощностью от 150 до 225 Вт, тягой от 4,0 до 14 мН и удельным импульсом от 550 до 877 с.

### 3. Двигательная установка для миссии малого аппарата к Марсу

Дальнейшее увеличение размеров аппаратов (и, соответственно, размеров их СБ) позволяет использовать существующие СПД с большей энергетикой, КПД и ресурсом. При этом аппараты уже выходят из класса кубсатов. Ниже рассмотрен проект миссии к Марсу, использующей ДУ на основе SPT-50M [12], представленного на рисунке 10.

На начальном этапе миссии [13] аппарату придается отлетный импульс разгонным блоком (РБ), и он летит по инерции в сторону орбиты Марса. На микроплатформе рамной конструкции разработки АО «РКС» размещается объединенная двигательная установка (ОДУ) малой тяги, позволяющая осуществить доразгон МКА после отделения от РБ для достижения орбиты Марса и обеспечить маневр выхода на целевую орбиту вокруг планеты.

В состав ОДУ производства АО ОКБ «Факел» входят два электроракетных двигателя SPT-50M, арматура, клапаны, баки с ксеноном, газовые электронагревные двигатели (ГД) ЭНД-10 и блок СПУ, представленные на рисунке 11.

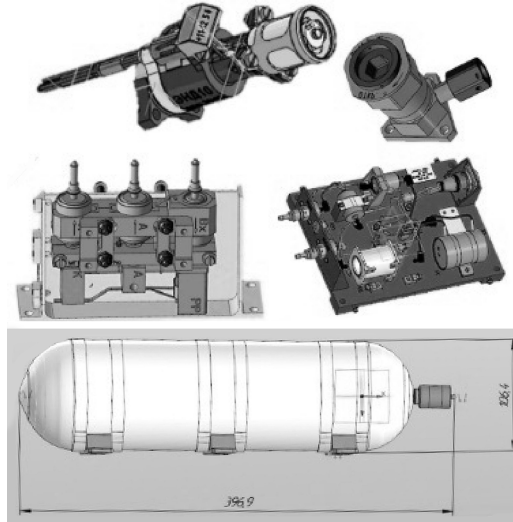


Рис. 11 Детали и сборочные единицы ОДУ

Общая схема объединенной двигательной установки представлена на рисунке 12, где Б — баллон, ПК — пусковой клапан, БПК — блок подачи ксенона, ГД№ — газовый двигатель (ЭНД-10), МГР — модуль газораспределения, ПГ — проверочная горловина. Указан лишь один двигатель SPT-50M. Второй находится рядом и вступает в работу после того, как первый полностью выработает свой ресурс. На последующих рисунках конструкции аппарата и ДУ также показан только один SPT-50M.

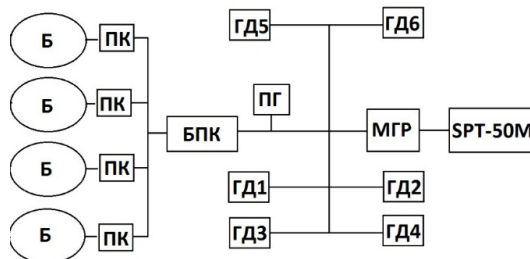


Рис. 12. Общая схема объединенной двигательной установки

В качестве источника электропитания используются солнечные батареи. В состав полезной нагрузки входят телескоп для проведения исследований Солнца на межпланетном участке и ультрафиолетовые камеры для проведения исследований на орбите вокруг Марса. Общий вид аппарата с развернутыми панелями солнечных батарей представлен на рисунке 13.

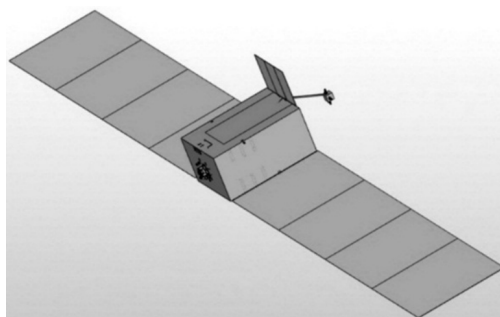


Рис. 13. Общий вид аппарата с развернутыми солнечными панелями, антенной и двигательной установкой

На вытянутой под углом штанге (справа сверху) размещен блок ГД1...ГД4. ГД5 и ГД6 (стабилизирующие аппарат по тангажу) заметны на верхних ребрах корпуса аппарата. Двигатель SPT-50M размещен на левой нижней грани аппарата. На верхней грани виден контур, внутри которого размещена полезная нагрузка.

Система управления аппаратом состоит из ОДУ и ее блока управления, баков с ксеноном и блока маховиков. Маршевый двигатель SPT-50M обладает тяговым усилием 18 мН и удельным импульсом до 1275 с при потребляемой мощности 300 Вт. Четыре бака по 8 л, вмещающие до 64 кг ксенона при массе конструкции баков 13,2 кг, обеспечивают работу ОДУ. Сухая масса МКА при этом составляет 92 кг. Приращение характеристической скорости МКА составит  $\Delta V = 5,75$  км/с.

При длительной работе маршевого двигателя нужно обеспечивать курсовую стабильность ориентации МКА. Для этого используется система ориентации с исполнительными элементами на основе маховиков и газовых электронагревных двигателей. Общий вид конструкции аппарата с такой ДУ представлена на рисунке 14.

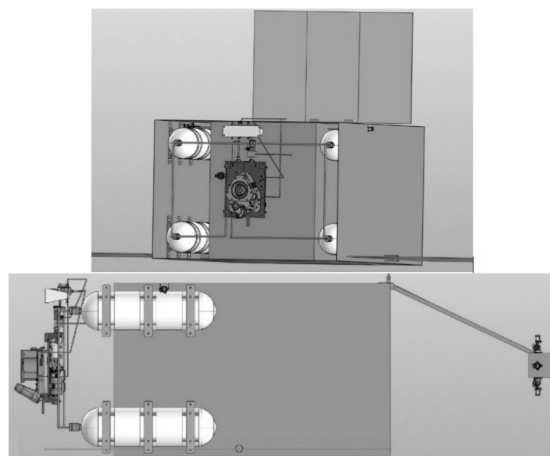


Рис. 14. Виды аппарата с элементами ОДУ

Анализ данной баллистической задачи сближения с Марсом показывает, что она более сложна, чем сближение с небесным телом типа астероида. Предварительный анализ миссий аналогичного аппарата к Луне и Венере показывает, что они также более просты из-за меньших расстояний и большего потока солнечной энергии, чем в случае пути к Марсу.

Таким образом, использование ЭРД с мощностью от 300 Вт, тягой от 18 мН и удельным импульсом тяги от 1275 с, позволяет планировать научные миссии на базе специально разработанных малых аппаратов сухой массой от 100 кг к космическим объектам в пределах пояса астероидов.

### Список литературы

1. Почему запуск 42 кубсатов и МКА попутной нагрузки 27 июня очень важен. 29.06.2023. URL: <https://habr.com/ru/companies/ruvds/articles/744728/> (дата обращения: 10.03.2024).
2. *Абраменков Г. В., Вертаков Н. М., Дронов П. А. и др.* Ракетные двигатели АО «ОКБ «Факел» для космических аппаратов — опыт летного применения и новые разработки // *Космическая техника и технологии*. 2023. № 4 (43). С. 13—30.
3. *Ким В. П.* Конструктивные признаки и особенности рабочих процессов в современных стационарных плазменных двигателях Морозова // *Журнал технической физики*. 2015. Т. 85, вып. 3.
4. Системы отделения КА Кубсат // AEROSPACE Capital : [сайт]. URL: <https://aerospacescapital.ru/ru/separation-systems/> (дата обращения: 10.03.2024).
5. «Зоркий» — 2 года на орбите! // *Спутникс* : [сайт]. URL: <https://sputnix.ru/ru/o-nas/novosti/zorkij-2-goda-na-orbite> (дата обращения: 18.03.2024).
6. Запущенные миссии. Зоркий-2М // *Спутникс* : [сайт]. URL: <https://sputnix.ru/ru/sputniki/na-orbite/zorkij-2m> (дата обращения: 18.03.2024).
7. Российский микроспутник «Зоркий-2М» прислал первые снимки Земли. URL: <https://prokosmos.ru/2024/03/19/rossiiskii-mikrosputnik-zorkii-2m-prislal-pervie-snimki-zemli> (дата обращения: 19.03.2024).
8. Оптико-электронные камеры для КА ДЗЗ формата Кубсат : презентация АО «НПО «Лептон». URL: <https://ppt-online.org/1248659> (дата обращения: 18.03.2024).
9. *Производство* // АО «ОКБ «Факел» : [офиц. сайт]. URL: <https://fakel-russia.com/produkcija> (дата обращения: 18.03.2024).
10. SpaceX не разрешили развернуть спутники Starlink на сверхнизких орбитах. URL: <https://prokosmos.ru/2024/03/15/spacex-ne-razreshili-razvernut-sputniki-starlink-na-sverkh nizkikh-orbitakh/> (дата обращения: 19.03.2024).
11. Reuters узнал о секретном контракте SpaceX с Пентагоном по запуску спутников-шпионов. URL: <https://www.forbes.ru/tekhnologii/508273-reuters-uznal-o-sekretnom-kontrakte-spacex-s-pentagonom-po-zapusku-sputnikov-spionov> (дата обращения: 19.03.2024).
12. *Овчинников М. Ю., Петрукович А. А., Рябогин Н. В. и др.* Миссия на Марс на базе МКА с ЭРДУ // *Материалы 58-х научных чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К. Э. Циолковского*. Калуга, 2023. С. 43—47.

13. Корнеев К. Р., Овчинников М. Ю., Перепухов Д. Г., Трофимов С. П. Двухуровневая схема оптимизации перелета Земля — Марс малого космического аппарата по гибридной схеме с электрореактивной двигательной установкой // XLVIII Академические чтения по космонавтике : сб. тр. М., 2024.

### **Об авторах**

Геннадий Владимирович Абраменков — директор, АО «ОКБ «Факел», Россия.  
E-mail: abramenkovgv@fakel-russia.com

Павел Александрович Дронов — гл. конструктор, канд. техн. наук, АО «ОКБ «Факел», Россия.

E-mail: dronov.pa@fakel-russia.com

Сергей Юрьевич Приданников — зам. гл. конструктора, канд. техн. наук, АО «ОКБ «Факел», Россия.

E-mail: Pridannikov@fakel-russia.com

Александр Никитович Нестеренко — ведущ. науч. сотр., канд. техн. наук, АО «ОКБ «Факел», Россия.

E-mail: Nesterenko@fakel-russia.com

Олег Владимирович Толстель — доц., канд. техн. наук, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: tolstel.oleg@mail.ru

Дильшат Бактышатович Ахметов — магистрант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: ahmetov.db@fakel-russia.com

Данила Сергеевич Васильев — магистрант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: vasiliev.ds@fakel-russia.com

Екатерина Сергеевна Степанова — магистрант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: stepanovaes@fakel-russia.com

### **The authors**

Gennady V. Abramenzov, Director, JSC OKB Fakel, Russia.

E-mail: abramenzovgv@fakel-russia.com

Dr Pavel A. Dronov, Chief Designer, JSC OKB Fakel, Russia.

E-mail: dronov.pa@fakel-russia.com

Dr Sergey Yu. Pridannikov, Deputy Chief Designer, JSC OKB Fakel, Russia.

E-mail: Pridannikov@fakel-russia.com

Dr Alexander N. Nesterenko, Leading Researcher, JSC OKB Fakel, Russia.

E-mail: Nesterenko@fakel-russia.com

Dr Oleg V. Tolstel, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: [tolstel.oleg@mail.ru](mailto:tolstel.oleg@mail.ru)

Dilshat B. Akhmetov, Master's student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: [ahmetov.db@fakel-russia.com](mailto:ahmetov.db@fakel-russia.com)

Danila S. Vasiliev, Master's student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: [vasiliev.ds@fakel-russia.com](mailto:vasiliev.ds@fakel-russia.com)

Ekaterina S. Stepanova, Master's student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: [stepanovaes@fakel-russia.com](mailto:stepanovaes@fakel-russia.com)

**А. В. Обноскина, А. В. Юров**

**ДВУМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ:  
ИТЕРАЦИИ И РАСШИРЕННАЯ СУПЕРСИММЕТРИЯ**

*Изучаются двумерные соотношения сплетания и их итерации. Предложена конкретная реализация итерационной схемы. Описано построение моделей расширенной суперсимметрии. В заключение предложена модель суперсимметричного гамильтониана с двукратно вырожденным нулевым уровнем. Такие состояния не перемешиваются преобразованиями суперсимметрии, поэтому суперсимметрия не нарушена.*

*In this article explore two-dimensional weaving principles and their iterations. A specific implementation of the iterative scheme is proposed. The construction of a model of extended supersymmetry is described. In conclusion, a model of a supersymmetric Hamiltonian with a doubly degenerate zero level is proposed. In this state, supersymmetry conversion is not allowed, so supersymmetry is not broken.*

**Ключевые слова:** двумерная расширенная суперсимметрия, преобразование Дарбу, нелинейные уравнения Шрёдингера, гамильтонианы, многомерные модели

**Keywords:** two-dimensional extended supersymmetry, Darboux transformation, nonlinear Schrödinger equations, Hamiltonians, multidimensional models

**Введение**

Как известно, одномерное преобразование Дарбу позволяет перестраивать дискретные спектры соответствующих гамильтонианов [1; 2]. Так, выбор в качестве опорной функции основного состояния приводит после преобразования Дарбу (ПД) к новому гамильтониану с вычеркнутым нижним уровнем. Добавить уровень можно, если выбрать в качестве опорной функции всюду строго положительное и растущее в обе стороны решение. Наконец, применение положительных решений, растущих в одну сторону и асимптотически стремящихся к нулю в другую, приводит к новому гамильтониану с тем же спектром, что и исходный [3]. Кроме того, ПД тесно связано с нерелятивистской суперсимметрией: описанные выше гамильтонианы можно объединить в матричный оператор (суперсимметричный гамильтониан), а из операторов Дарбу сконструировать матричные, эрмитово сопряженные операторы суперсимметрии.

Описанные операторы удовлетворяют градуированной суперсимметричной алгебре [4; 5], причем возможно построение и одномерной

расширенной квантовой механики с произвольным числом генераторов. Дальнейшие обобщения связаны с полиномиальной суперсимметрией [6] и с многомерными моделями [7—9].

Наиболее исследованными являются двумерные модели [10—16]. Благодаря серии работ стало понятно, что существует два способа реализации двумерной суперсимметричной квантовой механики. В первом супергамильтониан содержит пару скалярных и одну матричную компоненты, а суперзаряды линейны по производным (импульсам). Интересно отметить, что матричная компонента имеет вид гамильтониана Паули для нерелятивистского фермиона, который движется в плоскости во внешнем электромагнитном поле [17; 18]. Во втором способе (см.: [6]) супергамильтониан не содержит матричной компоненты, но суперзаряды квадратичны по импульсам.

В данной работе мы используем первый подход. Наша цель — развить и обобщить изученные ранее результаты для реализации:

- 1) расширенной двумерной суперсимметрии в рамках первого подхода;
- 2) итераций двумерного преобразования Дарбу;
- 3) построения суперсимметричного гамильтониана с дважды вырожденным нулевым уровнем.

Во второй части описана явная реализация двумерной расширенной суперсимметрии, в третьей — процедура итераций, в четвертой — суперсимметрия с вырожденным нулевым уровнем. В заключение мы подводим итоги и отмечаем открытые вопросы, нуждающиеся в дополнительных исследованиях. Везде используются обозначения, принятые в [7; 8].

## 1. Двумерная расширенная суперсимметрия

В одномерном случае процедура построения расширенной суперсимметрии подробно описана в [5]. Нам понадобится только структура суперсимметричного гамильтониана в зависимости от числа  $N$ . Она приведена ниже для четырех случаев (расширенная суперсимметрия реализуется с  $N=2$ ):

$$\begin{aligned}
 \widehat{h} &= \text{diag}(h_0, h_1), N=1 \\
 (h_0 \ h_1 \ ; \ h_1 \ h_2), N=2 \\
 (h_0 \ h_1 \ h_1 \ h_2 \ ; \ h_1 \ h_2 \ h_2 \ h_3), N=3 \\
 (h_0 \ h_1 \ h_1 \ h_2 \ h_1 \ h_2 \ h_3 \ ; \ h_1 \ h_2 \ h_2 \ h_3 \ h_2 \ h_3 \ h_3 \ h_4), N=4
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

и т. д.

Здесь используются скалярные одномерные гамильтонианы, последовательно связанные преобразованиями Дарбу, начиная с гамильтониана, снабженного нулевым индексом. Суперзаряды мы приводить не будем. Вертикальное многоточие стоит для удобства: общая структура пред-





$$H[N=3]= \left[ \begin{array}{cccc} \left[ \begin{array}{ccc} h_0 & 00 & 0 \\ 0 & h_{lm}^{(1)} & 0 \\ 0 & 00 & h_1 \end{array} \right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[ \begin{array}{ccc} h_1 & 00 & 0 \\ 0 & h_{lm}^{(2)} & 0 \\ 0 & 00 & h_2 \end{array} \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left[ \begin{array}{ccc} h_1 & 00 & 0 \\ 0 & h_{lm}^{(2)} & 0 \\ 0 & 00 & h_2 \end{array} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left[ \begin{array}{ccc} h_2 & 00 & 0 \\ 0 & h_{lm}^{(3)} & 0 \\ 0 & 00 & h_3 \end{array} \right] \end{array} \right] . \quad (1.13)$$

## 2. Суперсимметрия

$$\left( \begin{array}{cccc} \left[ \begin{array}{ccc} 0 \\ q_1^{(0)} \\ q_2^{(0)} \\ 0 \quad q_2^{(0)} \quad -q_1^{(0)} \quad 0 \end{array} \right] & & & 0 \\ & \left[ \begin{array}{ccc} 0 \\ q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \\ 0 \quad q_2^{(1)} \quad -q_1^{(1)} \quad 0 \end{array} \right] & & \\ & & \left[ \begin{array}{ccc} 0 \\ q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \\ 0 \quad q_2^{(1)} \quad -q_1^{(1)} \quad 0 \end{array} \right] & \\ & & & \left[ \begin{array}{ccc} 0 \\ q_1^{(2)} \\ q_2^{(2)} \\ 0 \quad q_2^{(2)} \quad -q_1^{(2)} \quad 0 \end{array} \right] \end{array} \right)$$





$$h_{lm}\varphi_m^{(1)} = H_{lm}\varphi_m^{(1)} = E_0\varphi_m^{(1)}. \quad (3.7)$$

Именно эту функцию используем для следующей итерации. Необходимо представить ее в виде

$$\begin{bmatrix} \varphi & Q_x \\ \varphi & Q_y \end{bmatrix} = O(x, y) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  const, а  $O(x, y)$  удовлетворяет двум нелинейным уравнениям:

$$\left( \partial_m O^+ \right) O = O^+ \partial_m O, \quad m = 1, 2. \quad (3.9)$$

Отсюда имеем 10 уравнений (из них 8 нелинейных) для определения  $O(x, y)$ . Предположим, что матрица  $O$  — вещественна, тогда число нелинейных уравнений для  $O$  сокращается до четырех + два линейных:

$$\left. \begin{aligned} O_{11,x}O_{12} + O_{21,x}O_{22} &= O_{11}O_{12,x} + O_{21}O_{22,x} \\ O_{12,x}O_{11} + O_{22,x}O_{21} &= O_{12}O_{11,x} + O_{22}O_{21,x} \\ O_{11,y}O_{12} + O_{21,y}O_{22} &= O_{11}O_{12,y} + O_{21}O_{22,y} \\ O_{12,y}O_{11} + O_{22,y}O_{21} &= O_{12}O_{11,y} + O_{22}O_{21,y} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

$$O_{12} = \frac{\varphi Q_x}{c_2} - \frac{c_1}{c_2} O_{11}, \quad O_{21} = \frac{\varphi Q_y}{c_1} - \frac{c_2}{c_1} O_{22}. \quad (3.11)$$

Если подставить (3.11) в (3.10), то получаем два линейных уравнения:

$$\begin{cases} c_1 F_x = c_2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 G_x \\ c_1 F_y = c_2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 G_y \end{cases}, \quad (3.12)$$

где  $F \equiv \frac{f}{a}$ ,  $G \equiv \frac{g}{b}$ ,  $f = O_{11}$ ,  $g = O_{22}$ ,  $a = \varphi Q_x$ ,  $b = \varphi Q_y$ .

Условие совместимости системы (3.12) суть закона инволюции:

$$\left\{ \frac{b}{a}, G \right\}_{y,x} = \left\{ \frac{b}{a}, F \right\}_{y,x}. \quad (3.13)$$

$$\{F, G\}_{x,y} = 0. \quad (3.14)$$

Обозначим

$$\frac{b}{a} = \frac{Q_y}{Q_x} \equiv S(y, x). \quad (3.15)$$

Тогда для решения (3.11) достаточно найти две величины  $F$  и  $G$ , находящиеся в инволюции с  $S(y, x)$ .

*Доказательство.* Пусть

$$\begin{aligned} S_y G_x = S_x G_y \\ S_y F_x = S_x F_y \end{aligned} \Rightarrow (G_x F_y = G_y F_x). \quad (3.16)$$

Возьмем первое уравнение. Так как

$$\begin{aligned} 2\lambda S S_y G_x = 2\lambda S S_x G_y &\Rightarrow \\ \Rightarrow 2\lambda S S_y G_x + \lambda S^2 G_{xy} = 2\lambda S S_x G_y + \lambda S^2 G_{xy} &\Rightarrow \\ \Rightarrow (\lambda S^2 G_x)_y = (\lambda S^2 G_y)_x &\Rightarrow \end{aligned} \quad (3.17)$$

существенно замкнутая 1-форма.

$$dF = dx(\lambda S^2 G_x) + dy(\lambda S^2 G_y), \quad (3.18)$$

$F$  — удовлетворяет уравнениям (3.12).

Таким образом, наша задача будет полностью решена, если найти величину  $G(x,y)$ , находящуюся в инволюции с

$$S \equiv \frac{Q_y}{Q_x}. \quad (3.19)$$

$F(x,y)$  определяется далее интегралом от замкнутой 1-формы (3.18). Можно легко построить решение:

$$G(x,y) = \frac{Q_y}{Q_x} + c_3, \quad F(x,y) = \frac{1}{3} \frac{c_2}{c_1} \left( \frac{Q_y}{Q_x} \right)^3 + c_4 \Rightarrow \quad (3.20)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\varphi}{3c_1 Q_x^2} (c_2 Q_y^3 + 3c_1 c_4 Q_x^3), \frac{\varphi}{3c_2 Q_x^2} [3(1 - c_1 c_4) Q_x^3 - c_2 Q_y^3] \\ \frac{\varphi Q_y}{c_1 Q_x} [(1 - c_2 c_3) Q_x - c_2 Q_y], \frac{Q_y \varphi}{Q_x} (Q_y + c_3 Q_x) \end{array} \right] = 0 \quad (3.21)$$

$$O = \frac{\varphi}{Q_x} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{3c_1 Q_x} (c_2 Q_y^3 + 3c_1 c_4 Q_x^3), \frac{1}{3c_2 Q_x} [3(1 - c_1 c_4) Q_x^3 - c_2 Q_y^3] \\ \frac{Q_y}{c_1} [(1 - c_2 c_3) Q_x - c_2 Q_y], Q_y (Q_y + c_3 Q_x) \end{array} \right], \quad (3.22)$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4$  — произвольные константы.

Другой вариант (более полный):

$$O_1 = \frac{u}{Q_y} \left[ \begin{array}{l} Q_x (c_3 Q_x + c_4 Q_y); \frac{Q_x}{c_2} ((1 - c_1 c_4) Q_y - c_1 c_3 Q_x) \\ \frac{1}{3c_1 Q_y} (3(1 - c_2 c_5) Q_y^3 - c_1 Q_x^3); \frac{1}{3c_2 Q_y} (c_1 Q_x^3 + 3c_2 c_5 Q_y^3) \end{array} \right]. \quad (3.23)$$

Здесь  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  — любые.

#### 4. Секретная суперсимметрия в двух измерениях

$$\begin{aligned} \dot{h}_0 &= q_m^+ q_m + E_0, \quad h_1 = p_m^+ p_m + E_0, \quad p_m \equiv \varepsilon_{mn} q_n^+, \quad q_n \equiv \partial_n - (\ln \varphi)_n; \\ \dot{h}_0 \varphi &= E_0 \varphi; \quad \widehat{h}_{lm} \equiv h_{lm} + H_{lm} - E_0 \delta_{lm}, \quad h_{lm} = q_l q_m^+ + E_0 \delta_{lm}; \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} H_{lm} &= p_l p_m^+ + E_0 \delta_{lm}, \\ q_l h_0 &= h_{lm} q_m = \widehat{h}_{lm} q_m, & h_1 &= H_{lm} p_m = \widehat{h}_{lm} p_m, \\ h_0 q_l^+ &= q_m^+ h_{ml} = q_m^+ \widehat{h}_{ml}, & p_l^+ &= p_m^+ H_{ml} = p_m^+ \widehat{h}_{ml}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$H_S = \text{diag}(h_0 - E_0, \widehat{h} - I \cdot E_0, h_1 - E_0). \quad (4.3)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ q_1 & 0 & & \\ q_2 & & & \\ 0 & q_2 & -q_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^+ = \begin{bmatrix} 0 & q_1^+ & q_2^+ & 0 \\ & & q_2^+ & \\ & 0 & & -q_1^+ \\ & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} h_{mk} H_{kl} &= H_{mk} h_{kl} = E_0 \widehat{h}_{ml}, \\ h_{lm} p_m &= E_0 p_l, \quad H_{lm} q_m = E_0 q_l. \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} h_0 \psi = E^{(0)} \psi & h_{lm} \psi_m = E^{(0)} \psi_l \\ h_1 \psi^{(1)} = E^{(1)} \psi^{(1)} & H_{lm} \phi_m = E^{(1)} \phi_l \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} \psi_l = q_l \psi & \phi_l = p_l \psi^{(1)} \\ \psi = q_l^+ \psi_l & \psi^{(1)} = p_l^+ \phi_l. \end{cases} \quad (4.7)$$

Из (4.4) следует:

$$\begin{aligned} h_{lm} \Phi_m &= E_0 \Phi_l, & \widehat{h}_{lm} \Phi_m &= E^{(1)} \Phi_l \\ H_{lm} \psi_m &= E_0 \psi_l, & \widehat{h}_{lm} \psi_m &= E^{(0)} \psi_l. \end{aligned} \quad (4.8)$$

**Теорема.** Уровень  $E_0$  присутствует в спектре  $\widehat{h}$  тогда, когда существует  $\tilde{\psi}_m$ ,  $(\tilde{\psi}_m, \tilde{\psi}_m) < \infty$ , такая, что

$$\widehat{h}_{lm} \tilde{\psi}_m = h_{lm} \tilde{\psi}_m = H_{lm} \tilde{\psi}_m = E_0 \tilde{\psi}_l. \quad (4.9)$$

**Доказательство.** Пусть  $\rho_l \equiv h_{lm} \tilde{\psi}_m$  и  $\sigma_l = H_{lm} \tilde{\psi}_m$ , где  $\tilde{\psi}_m$  удовлетворяет  $\widehat{h} \tilde{\psi} = E_0 \tilde{\psi}$ . Тогда

$$\rho + \sigma = 2E_0 \tilde{\psi} \Rightarrow \|\rho + \sigma\| = 2|E_0|. \quad (4.10)$$

С другой стороны,

$(\tilde{\psi}, h\sigma) = (h\tilde{\psi}, \sigma) = (\rho, \sigma) = (\sigma, \rho) = E_0^2 \Rightarrow \|\rho - \sigma\| = 0 \Rightarrow \sigma = \rho = E_0 \tilde{\psi}$ ,  
что и требовалось доказать.

Итак, нам нужно нормируемое решение (4.9). Достаточное условие:

$$q_m^+ \tilde{\psi}_m = p_m^+ \tilde{\psi}_m = 0, \quad (4.11)$$

следовательно, существуют функции  $\psi$  и  $\psi^{(1)}$  такие, что  $\tilde{\psi}_m = q_m \psi = p_m \psi^{(1)}$   
и  $h_0 \psi = E_0 \psi$ ,  $h_1 \psi^{(1)} = E_0 \psi^{(1)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \psi^{(1)} = \frac{1}{\varphi} \int dx^k \varepsilon_{km} (\varphi \partial_m \psi - \psi \partial_m \varphi) \quad (4.12)$$

— ненормируемая.

Другой подход:

$$\partial_m (\varphi^2 \partial_m Q) = 0, \quad \hat{\varphi} \equiv Q\varphi \Rightarrow h_0 \hat{\varphi} = E_0 \hat{\varphi}; \quad (4.13)$$

$$\left( d=1: \hat{\varphi} = \varphi \int \frac{dx}{\varphi^2} \right), \quad \hat{\varphi}^{(1)} = \frac{1}{\varphi}; \quad (4.14)$$

$$\varphi_m^{(1)} \equiv \tilde{\psi}_m = q_m \hat{\varphi} \equiv \varphi \partial_m Q. \quad (4.15)$$

Проверка дает

$$h_{lm} \tilde{\psi}_m = E_0 \tilde{\psi}_l = H_{lm} \tilde{\psi}_m \quad (4.16)$$

(так как  $q_m^+ \tilde{\psi}_m = p_m^+ \tilde{\psi}_m = 0$ ). Итак:  $\tilde{\psi}_m = \varphi \partial_m Q$ , где  $Q$  удовлетворяет уравнению

$$\partial_m (\varphi^2 \partial_m Q) = 0. \quad (4.17)$$

Если  $\varphi$  — основное состояние  $h_0$ , то

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi Q_x \\ \varphi Q_y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Если  $\varphi$  экспоненциально растет по всем направлениям, то

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi Q_x \\ \varphi Q_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

$$\left( \psi_1, \psi_2 \right) = 0, \quad Q\psi_{1,2} = Q^+\psi_{1,2} = 0. \quad (4.20)$$

Решение (4.17) (частное).

Если  $Q_{xy} = 0$ , то (4.17) можно представить в виде:

$$\partial_x \left[ \left( \partial_{xy} \alpha - \frac{1}{2} e^\alpha \right) \partial_x Q \right] + \partial_y \left[ \left( \partial_{xy} \alpha - \frac{1}{2} e^\alpha \right) \partial_y Q \right] = 0, \quad (4.21)$$

где

$$\alpha \equiv \ln \varphi^2 \Rightarrow Q_{xy} = 0, \quad \alpha_{xy} = \frac{1}{2} e^\alpha. \quad (4.22)$$

$$\alpha(x, y) = \ln \frac{4A'(x)B'(y)}{[A(x) + B(y)]^2} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(x, y) = 2 \frac{[A'(x)B'(y)]^{\frac{1}{2}}}{A(x) + B(y)} \\ Q(x, y) = Q_1(x) + Q_2(y) \end{cases}. \quad (4.23)$$

$A$  и  $B$  — вещественные, кусочно и трижды непрерывно-дифференцируемые функции своих аргументов. Они восстанавливаются по данному  $\alpha$  с точностью до дробно-линейного преобразования

$$A \rightarrow A' = \frac{aA + b}{cA + d}, \quad B \rightarrow B' = \frac{-aB + b}{cB - d}, \quad (4.24)$$

$$Im(a, b, c, d) = 0, \quad ad - bc = 1. \quad (4.25)$$

Кроме того, потенциал:  $u(x, y)$  и  $u^{(1)}(x, y)$ :

$$\begin{aligned} u(x, y) - E_0 &= - \frac{(A'')^2 + (B'')^2}{4(A'B')^2} + \frac{A''' + B'''}{2A'B'} - \\ &- \frac{A''A' + B''B'}{A'B'(A+B)} - \frac{\Delta(A+B)}{A+B} + 2 \frac{(A')^2 + (B')^2}{(A+B)^2}; \quad (4.26) \\ u^{(1)} - E_0 &= - \frac{(A'')^2 + (B'')^2}{4(A'B')^2} - \frac{A''' + B'''}{2A'B'} + \\ &+ \frac{3(A''A' + B''B')}{A'B'(A+B)} + \frac{\Delta(A+B)}{A+B} - 4 \frac{(A')^2 + (B')^2}{(A+B)^2}. \end{aligned}$$

### Заключение

Мы предъявили явный алгоритм, который позволяет строить расширенную суперсимметрию в двумерном случае, для произвольного числа  $N$ . В силу наличия матричной компоненты супергамильтонианы имеют

блочно-диагональный вид, причем каждый блок состоит из двух скалярных и одного матричного гамильтониана. Также приведен явный вид операторов суперсимметрии. Таким образом, наша модель обобщает результаты работы [8].

Была предложена модель, в которой удается выполнить однократную итерацию двумерного преобразования Дарбу. На каждом шаге строится матричная компонента удвоенной размерности, которая используется для дальнейшей итерации. Согласно схеме, предложенной в [7], необходимо в качестве промежуточного шага решить уравнение в форме представления нулевой кривизны, причем на решение накладывается условие эрмитовости. Интересным открытым вопросом является ослабление этого условия. Тогда в качестве вышеупомянутого уравнения можно использовать нелинейные интегрируемые системы типа НУШ. Это будет темой нашего дальнейшего исследования.

Развитие вышеописанной темы привело к интересной реализации алгебры нерасширенной и ненарушенной суперсимметрии с вырожденным нижним нулевым уровнем. Такая ситуация весьма необычна. В работе [8] предложен суперполевой формализм, позволяющий связать  $D$ -мерную суперсимметричную нерелятивистскую механику с  $(0 + 1)$ -мерной теорией  $D$ -компонентного суперполя. Возникает вопрос: к каким следствиям может привести ситуация с вырожденным нулевым уровнем в теории поля? Вероятным ответом на этот вопрос будет «динамическое» нарушение суперсимметрии за счет квантовых поправок, но этот вопрос нуждается в дополнительном исследовании.

### Список литературы

1. *Darboux G.* On a proposition relative to linear equations // *Comptes Rendus Acad. Sci.* 94, 1456 (1882). arXiv:physics/9908003.
2. *Matveev V. B., Salle A.* Darboux Transformation and Solitons. Berlin ; Heidelberg, 1991.
3. *Березовой В. П., Пашнев А. И.* Суперсимметричная квантовая механика иперестройка спектров гамильтонианов // *ТМФ.* 1987. Т. 70, № 1. С. 146—153.
4. *Березовой В. П., Пашнев А. И.*  $N = 2$  суперсимметричная квантовая механика и обратная задача рассеяния // *ТМФ.* 1988 Т. 74, № 3. С. 392—398.
5. *Березовой В. П., Пашнев А. И.* Одномерная расширенная суперсимметричная квантовая механика // *ТМФ.* 1989. Т. 78, № 2. С. 289—296.
6. *Андрианов А. А., Иоффе М. В., Нишнанидзе Д. Н.* Полиномиальная суперсимметрия и динамические симметрии в квантовой механике // *ТМФ.* 1995. Т. 104, № 3. С. 463—478.
7. *Андрианов А. А., Борисов Н. В., Иоффе М. В.* Метод факторизации и преобразование Дарбу для многомерных гамильтонианов // *ТМФ.* 1984. Т. 61, № 2. С. 183—198.
8. *Андрианов А. А., Борисов Н. В., Иоффе М. В., Эйдес М. И.* Суперсимметричная механика: новый взгляд на эквивалентность квантовых систем // *ТМФ.* 1984. Т. 61, № 1. С. 17—28.
9. *Андрианов А. А., Борисов Н. В., Иоффе М. В.* Теория рассеяния для суперсимметричного гамильтониана и суперсимметрия ядерных взаимодействий // *ТМФ.* 1987. Т. 72, № 1. С. 97—111.

10. *Cooper F., Khare A., Sukhatme U.* Supersymmetry and Quantum Mechanics // Phys. Rep. 1995. Vol. 251, № 5—6. P. 267—385. arXiv: hep-th/9405029.
11. *Junker G.* Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics, Springer. Berlin, 1996.
12. *Bagchi B. K.* Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics. Chapman ; Boca Raton, 2001.
13. *Fernandez J. D. C.* Supersymmetric Quantum Mechanics // AIP Conf. Proc. 2010. Vol. 1287. P. 3—36. arXiv: 0910.0192.
14. *Andrianov A. A., Ioffe M. V.* Nonlinear Supersymmetric Quantum Mechanics: concepts and realizations // J. Phys. A: Math. Theor. 2012. Vol. 45, № 50. Art. № 503001. arXiv: 1207.6799.
15. *Иоффе М. В., Канната Ф., Нишнанидзе Д. Н.* Точно решаемая двумерная комплексная модель с вещественным спектром // ТМФ. 2006. Т. 148, № 1. С. 102—111.
16. *Иоффе М. В., Колеватова Е. В., Нишнанидзе Д. Н.* Некоторые свойства форминвариантной двумерной модели скарф. Ч. II // ТМФ. 2015. Т. 185, № 1. С. 99—108.
17. *Andrianov A. A., Ioffe M. V.* Pauli fermions as components of N=2 supersymmetrical quantum mechanics // Phys. Lett. B. 1988. Vol. 205, № 4. P. 507—510.
18. *Ioffe M. V., Neelov A. I.* Pauli equation and the method of supersymmetric factorization // J. Phys. A: Math. Gen. 2003. Vol. 36, № 10. P. 2493—2506. arXiv: hep-th/0302004.

### Об авторах

Ангелина Васильевна Обноскина — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: angelinalina15@mail.ru

Артем Валерианович Юров — д-р физ.-мат. наук, проф. Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: aiurov@kantiana.ru

### The authors

Angelina V. Obnoskina, PhD student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: angelinalina15@mail.ru

Prof. Artyom V. Yurov, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: aiurov@kantiana.ru

А. Р. Максютов, Р. В. Чириков, А. А. Юрова

### МЕТОД ДВУМЕРНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ

*Исследуется метод двумерной факторизации с точки зрения наличия свойства спектральной эквивалентности. Два гамильтониана считаются спектрально эквивалентными, если их (дискретные, для определенности) спектры отличаются лишь на конечное число уровней. В отличие от одномерного случая, в двух измерениях спектрально эквивалентными оказываются два матричных гамильтониана: один диагональный, состоящий из двух скалярных гамильтонианов, и второй — матричный, не имеющий вида обычного шрёдингеровского оператора. Ранее в литературе был исследован случай преобразования Дарбу с опорной функцией, совпадающей с волновой функцией основного состояния исходного скалярного гамильтониана, и было показано, что при этом этот нижний уровень отсутствует в спектре матричного оператора. В данной статье впервые изучена процедура добавления уровня к матричному гамильтониану, и показано, что на этом пути естественно возникают преобразования Мутара, связывающие решения двух скалярных уравнений Шрёдингера. Обсуждается свойство форм-инвариантности соответствующих двумерных потенциалов. Показано, что преобразования Мутара как симметрии допускают наглядную геометрическую интерпретацию, как конформные преобразования в теории поверхностей.*

*The method of two-dimensional factorization is investigated from the point of view of the presence of the property of spectral equivalence. Two Hamiltonians are considered spectrally equivalent if their (discrete, to be specific) spectra differ only by a finite number of levels. Unlike the one-dimensional case, in two dimensions two matrix Hamiltonians turn out to be spectrally equivalent: one is diagonal, consisting of two scalar Hamiltonians, and the second is matrix, which does not have the form of the usual Schrödinger operator. Previously, in the literature, the case of the Darboux transform with a support function coinciding with the wave function of the ground state of the original scalar Hamiltonian was studied and it was shown that in this case this lower level is absent in the spectrum of the matrix operator. This article is the first to study the procedure for adding a level to a matrix Hamiltonian and shows that along this path Moutard transformations naturally arise, connecting solutions of two scalar Schrödinger equations. The shape-invariance property of the corresponding two-dimensional potentials is discussed. It is shown that Moutard transformations, as symmetries admit of a clear conformal geometric interpretation, as conformal transformations in the theory of surfaces.*

**Ключевые слова:** двумерная факторизация, преобразование Дарбу, преобразование Мутара, спектры, конформные преобразования

**Keywords:** two-dimensional factorization, Darboux transformation, Moutard transformation, spectra, conformal transformations

## Введение

Преобразование Дарбу для одномерного уравнения Шрёдингера является эффективным методом построения потенциалов с заданным наперед спектром. Более того, не будет преувеличением сказать, что все потенциалы, для которых стационарное  $d = 1$  уравнение Шрёдингера может быть решено аналитически, связаны друг с другом преобразованиями Дарбу. Это обстоятельство открывает заманчивую возможность применять для содержательного математического моделирования в области квантовой механики и волновой теории точно решаемые модели. Например, если нам известен спектр гамильтониана, то мы можем построить семейство таких гамильтонианов, параметризованных набором произвольных величин, в количестве, не превышающем число уровней в спектре.

Однако одномерные задачи представляют собой, конечно, только идеализацию реальных трехмерных проблем. С этой позиции чрезвычайный интерес представляет обобщение метода преобразования Дарбу на случай  $d = 2$  и особенно  $d = 3$ . В этой работе мы изучаем двумерный случай. Как будет показано ниже, в многомерье задача существенно усложняется и дополнительно приобретает некоторые специфические особенности.

Мы будем использовать двумерный метод факторизации, описанный в работах [1—3]. Наша цель — изучить вопросы, не рассмотренные в данных статьях, а именно: (1) процедуру добавления уровня к спектру; (2) роли преобразований Мутара и таких симметрий, как (3) форминвариантность и (4) геометрическая интерпретация (конформные преобразования в теории поверхностей).

### 1. Двумерные преобразования Дарбу

Рассмотрим двумерное стационарное уравнение Шрёдингера

$$\Delta\psi - (x,y,E) + u(x,y,E)\psi(x,y,E) = E\psi(x,y,E). \quad (1.1)$$

В дальнейшем будем опускать аргумент  $y$  зависимых величин.

Пусть  $\varphi$  — частное решение (1.1), отвечающее собственному значению  $E = E_0$ . Построим два оператора Дарбу:

$$q_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x} - (\ln\varphi)_x, \quad q_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y} - (\ln\varphi)_y. \quad (1.2)$$

Тогда исходный гамильтониан  $h_0 = -\Delta + u$  факторизуется по формулам

$$h_0 = q_1^+ q_1 + q_2^+ q_2 + E_0 \equiv q_m^+ q_m + E_0, \quad m = 1, 2. \quad (1.3)$$

Всюду в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

«Дарбу-одетый» гамильтониан будем обозначать  $h_1 = -\Delta + u^{(1)}$ , где

$$u^{(1)} = u - 2\Delta\ln\varphi. \quad (1.4)$$

Несложно убедиться, что

$$h_1 = q_m q_m^+ + E_0, \quad h_1 \frac{1}{\varphi} = E_0 \frac{1}{\varphi}. \quad (1.5)$$

Однако, в отличие от одномерного случая, между спектрами  $h_0$  и  $h_1$ , вообще говоря, нет никакой связи. Для иллюстрации последнего утверждения рассмотрим притягивающий кулоновский потенциал  $u = -ar^{-1}$ ,  $a > 0$ .

Найдем волновые функции основного состояния гамильтониана с притягивающим кулоновским потенциалом.

Результат предыдущей задачи показывает, что ad hoc гамильтониан  $h_1$  вообще не обладает дискретным спектром, тогда как при  $d=1$  спектр  $h_1$  должен был получиться из спектра  $h_0$  вычеркиванием нижнего уровня. Сказанное должно прояснить то обстоятельство, что при  $d > 1$  мы не имеем формул, выражающих волновые функции  $h_1$  через волновые функции  $h_0$ , подобные одномерному случаю, так как наличие таких формул означает и наличие общих связей между спектрами  $h_0$  и  $h_1$ . Не запрещено, однако, с одной стороны, существование потенциалов специального вида, допускающих связь спектров соответствующих гамильтонианов, а с другой — наличие формул, связывающих волновые функции  $h_0$  и  $h_1$ , не относящиеся к физическому спектру. Как мы увидим, обе эти возможности допускают конкретную реализацию.

Общие связи между спектрами существуют для пар  $h_0, h_{lm}$  и  $h_1, h_{lm}$ , где  $h_{lm}$  и  $H_{lm}$  — некоторые  $2 \times 2$  матричные операторы специального вида:

$$h_{lm} = q_l q_m^+ + E_0 \delta_{lm}, \quad H_{lm} = \rho_l \rho_m^+ + E_0 \delta_{lm}. \quad (1.6)$$

Здесь  $\rho_l = \varepsilon_{lk} q_k^+$ , то есть  $\rho_1 = q_2^+, \rho_2 = -q_1^+$ . Действительно, учитывая, что  $h_1$  можно представить в виде  $h_1 = \rho_m^+ \rho_m + E_0$ , несложно проверить истинность соотношений сплетания:

$$\begin{aligned} q_l h_0 &= h_{lm} q_m, & \rho_l h_1 &= H_{lm} \rho_m; \\ h_0 q_1^+ &= q_m^+ h_{ml}, & h_1 \rho_1^+ &= \rho_m^+ H_{ml}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Построим важный в дальнейшем оператор

$$\tilde{h}_{lm} \equiv h_{lm} + H_{lm} - E_0 \delta_{lm}. \quad (1.8)$$

Несложно проверить, что он сплетается с  $h_0$  и  $h_1$  по формулам (1.7).

Покажем, что  $(\psi_1, \phi_1) = 0$  и  $q_1^+ \phi_1 = \rho_1^+ \psi_1 = 0$ .

Отдельно рассмотрим уровень  $E_0$ . Пусть  $\varphi \equiv e^{-x}$  — волновая функция основного состояния  $h_0$ . Допустим, что  $E_0 = 0$ . Покажем, что в физических спектрах  $\tilde{h}_{lm}$  и  $h_1$  отсутствует нулевой уровень. Действительно, пусть  $E_0 = 0$  лежит в физическом спектре  $h_1$ . Тогда

$$0 = (\psi^{(1)}, h_1 \psi^{(1)}) = \sum_{k=1}^2 \|q_k \psi^{(1)}\|^2, \quad (1.9)$$

где  $\psi^{(1)}$  — соответствующая нормируемая собственная функция  $h_1$ . Из (1.9) следует  $q_k^+ \psi^{(1)} = 0$ , то есть  $\psi^{(1)} = e^x$ . Другими словами, если  $\psi$  нормируема ( $\chi$  растет на бесконечности), то  $\psi^{(1)}$  ненормируема, что и доказывает утверждение для  $h_1$ .

Для доказательства отсутствия уровня  $E_0 = 0$  у  $\tilde{h}_{lm}$  следует учесть, что соответствующая быстро убывающая функция  $\tilde{\psi}_m$  ( $m = 1, 2$ ) должна бы удовлетворять условию

$$0 = (\tilde{\psi}_m, \tilde{h}_{ml} \tilde{\psi}_l) = \sum_{m=1}^2 \left( \|q_m^+ \tilde{\psi}_m\|^2 + \|\rho_m^+ \tilde{\psi}_m\|^2 \right), \quad (1.10)$$

откуда

$$q_m^+ \tilde{\psi}_m = \rho_m^+ \tilde{\psi}_m = 0. \quad (1.11)$$

Легко видеть, что решение уравнения  $q_m^+ \tilde{\psi}_m = 0$  имеет вид

$$\tilde{\psi}_m^{(1)} = \rho_m \theta, \quad (1.12)$$

откуда вытекает (в силу (1.11)), что  $h_1 \theta = 0$ . Однако, как показано выше, у этого уравнения нет нормируемых решений, и можно показать, что все его решения имеют по какому-нибудь направлению такой экспоненциальный рост, который не устраняется действием  $\rho_m$ , что и доказывает сделанное выше утверждение для  $\tilde{h}_m$ .

### Добавление уровня к спектру.

Проведенное выше рассмотрение относится к случаю, когда  $\varphi$  — волновая функция основного состояния. Сказанное не исключает возможности такого выбора  $\varphi$ , что уровень  $E_0$  (выбранный ранее за нуль) все же будет присутствовать в спектрах  $h_1$  и  $\tilde{h}_m$  [5—7].

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Прежде всего покажем, что уровень  $E_0$  присутствует в спектре  $\tilde{h}_m$  тогда и только тогда, когда отвечающая ему достаточно быстро убывающая волновая функция  $\tilde{\psi}_m$  удовлетворяет условиям:

$$h_{lm} \tilde{\psi}_m = H_{lm} \tilde{\psi}_m = E_0 \tilde{\psi}_m. \quad (1.13)$$

Действительно, пусть существует  $\tilde{\psi}_m$  такая, что

$$\tilde{h}_{lm} \tilde{\psi}_m = E_0 \tilde{\psi}_m, \quad (\tilde{\psi}_m, \tilde{\psi}_m) = 1. \quad (1.14)$$

Определим функции  $\rho_m$  и  $\sigma_m$  равенствами

$$\rho_m \equiv h_{lm} \tilde{\psi}_m, \quad \sigma_m \equiv H_{lm} \tilde{\psi}_m. \quad (1.15)$$

Из (1.8) следует, что  $\sigma + \rho = 2E_0 \tilde{\psi}$  (индексы опущены), то есть

$$(\rho + \sigma, \rho + \sigma) = 4E_0^2, \quad (1.16)$$

если  $\rho$  и  $\sigma$  нормируемы (так как  $\tilde{\psi}_m$  достаточно быстро убывает). С другой стороны, можно убедиться, что

$$h_{mk} H_{kl} = H_{mk} h_{kl} = E_0 \tilde{h}_{ml}, \quad (1.17)$$

откуда

$$h_{lm} \sigma_m = H_{lm} \rho_m = E_0^2 \tilde{\psi}_l. \quad (1.18)$$

Таким образом,

$$(\tilde{\psi}_m, h_{ml} \sigma_l) = (h_{lm} \tilde{\psi}_m, \sigma_l) = (\rho_m, \sigma_m) = E_0^2. \quad (1.19)$$

Комбинируя с (1.16), получаем  $(\rho - \sigma, \rho - \sigma) = 0$ , следовательно,  $\sigma_m = \rho_m = E_0 \tilde{\psi}_m$ . Окончательно из (1.15) получаем уравнение (1.13).

Таким образом, для того чтобы уровень  $E_0$  был в физическом спектре  $\tilde{h}_m$ , необходимо найти нормируемое решение (1.13). Пусть  $\tilde{\psi}_m$  такая функция. Действуя на нее  $\tilde{h}_m$ , получаем уравнения

$$q_m^+ \tilde{\psi}_m = \rho_m^+ \tilde{\psi}_m = 0. \quad (1.20)$$

Это означает, что должны существовать две функции  $\psi$  и  $\psi^{(1)}$  такие, что

$$\tilde{\psi}_m = q_m \psi = \rho_m \psi^{(1)}, \quad (1.21)$$

и которые удовлетворяют уравнениям:

$$h_0 \psi = E_0 \psi, \quad h_1 \psi^{(1)} = E_0 \psi^{(1)}. \quad (1.22)$$

Решая (1.21) относительно  $\psi^{(1)}$  получаем важную формулу, связывающую  $\psi$  и  $\psi^{(1)}$

$$\psi^{(1)} = \frac{\int dx_k \varepsilon_{km} (\varphi \partial_m \psi - \psi \partial_m \varphi)}{\varphi}, \quad (1.23)$$

где  $\partial_m \equiv \frac{\partial}{\partial x_m}$ .

Преобразование в. ф., определяемое формулой (1.23), называют преобразованием Мутара. Это преобразование похоже внешне на ПД. Сродство (1.23) и преобразования  $\psi$ -функции  $\int dq \psi^*(q\lambda_1) \psi(q\lambda_2) = \delta(\lambda_1 - \lambda_2)$  (\*) проявляется и в том, что при редукции к случаю  $d = 1$  преобразование Мутара формально совпадает с преобразованием Дарбу. Однако между (\*) и (1.23) существует принципиальное отличие. Действительно, функции  $\psi^{(0)}$  и  $\psi_1^{(0)}$  из (\*) могут отвечать различным собственным значениям. Именно это приводит к замечательной возможности перестраивать дискретный спектр данного гамильтониана произвольным образом. Функции же  $\varphi$  и  $\psi$  из (1.23) отвечают одному и тому же с. з., поэтому в общем случае (как было отмечено выше) спектры двумерных гамильтонианов и не определяют друг друга [8—12].

Теперь мы готовы к обсуждению процедуры «добавления уровня» к спектру в двух измерениях. Пусть — интегрируемый гамильтониан, физический спектр которого состоит из уровней  $E_i > E_0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Выберем по аналогии с одномерным случаем (см. выше)  $\varphi > 0$ , для всех  $x$  и  $y$  и обладающую дополнительно экспоненциальным ростом по всем направлениям на плоскости. Очевидно, что при этом в спектре появится уровень  $E_0$  с волновой функцией  $\varphi^{(0)} = \varphi^{-1}$ .

Таким образом, стартуя с точно решаемого гамильтониана, можно построить новый гамильтониан, дискретный спектр которого либо лежит выше нижнего уровня в спектре, либо начинается с произвольного, наперед заданного с. з., лежащего под нижним уровнем. Этим исчерпывается общая информация, которую можно получить о спектре.

Несколько сложнее выглядит добавление уровня к спектру  $\tilde{h}_m$ . Удобно поступить следующим образом.

Пусть функция  $Q(x, y, E_0)$  удовлетворяет уравнению

$$\partial_m (\varphi^2 \partial_m Q) = 0. \quad (1.24)$$

Определим еще одну функцию  $\hat{\varphi} \equiv Q\varphi$ . Тогда, если  $\varphi = E_0 \varphi$ , то и  $h_0 \hat{\varphi} = E_0 \hat{\varphi}$ . В частности, при  $d = 1$

$$\hat{\varphi} = \varphi \int \frac{dx}{\varphi^2}.$$

То есть

$$\hat{\varphi}^{(1)} = \frac{1}{\varphi}.$$

Аналогично при всех  $d$  (и при  $d = 2$ , в частности) определим

$$\varphi_m^{(1)} \equiv q_m \hat{\varphi} = \varphi \partial_m Q. \quad (1.25)$$

Самостоятельно убедитесь, что будет собственной функцией  $h_{im}$  с  $E = E_0$ . Более того, прямая проверка показывает, что

$$q_m^+ \varphi_m^{(1)} = p_m^+ \varphi_m^{(1)} = 0, \quad (1.26)$$

поэтому  $\varphi_m^{(1)}$  будет собственной функцией и для  $H_{im}$ . Можно показать, что для ненормируемой  $\varphi$  существуют решения уравнения (1.24)  $Q$ , обеспечивающие нормируемость  $\varphi_m^{(1)}$  из (1.25), то есть в спектре  $h_{im}$  будет присутствовать уровень  $E_0$ .

## 2. Преобразования Мутара

В этом параграфе мы рассмотрим подробнее формулу (1.23) как двумерный аналог преобразования Дарбу, связывающего ненормируемые решения двух скалярных уравнений Шрёдингера. Поскольку все функции, участвующие в этом преобразовании, отвечают одному и тому же значению  $E = E_0$ , без потери общности положим его равным нулю. Кроме того, мы одновременно со стандартным эллиптическим случаем рассмотрим и гиперболический.

Пусть  $\psi(\rho, q)$  — решение уравнения Шрёдингера (правильнее было бы называть (2.1) уравнением Лапласа, но для удобства сохраним единую терминологию):

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho \partial q} \psi + u(\rho, q) \psi = 0. \quad (2.1)$$

Тогда в новых переменных преобразование Дарбу — Мутара имеет вид

$$\psi^{(1)} = \frac{\theta(\psi, \psi_1)}{\psi_1}, \quad (2.2)$$

$$u^{(1)} = u + \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial q} \ln \psi_1, \quad (2.3)$$

$$\theta(f, g) = \int_{M_0}^M d\rho \left( f \frac{\partial g}{\partial \rho} - g \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) - dq \left( f \frac{\partial g}{\partial \rho} - g \frac{\partial f}{\partial \rho} \right). \quad (2.4)$$

Кроме того,  $\psi_1^{(1)} = \psi_1^{-1}$  (разумеется,  $\psi_1$  — частное решение (1.1)).

При  $d=1$  существуют четыре потенциала, линейно преобразующиеся при преобразованиях Дарбу. В двух пространственных измерениях ситуация значительно богаче, поскольку таких потенциалов существует бесконечно много. Например, легко видеть, что для потенциалов вида

$$u(\rho, q) = B(q\beta(q) - \rho\alpha(\rho)) + \alpha(\rho)\beta(\rho) - B^2 q\rho, \quad (2.5)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные функции своих аргументов, преобразование (2.3) сводится к сдвигу на  $2B = \text{const}$ :

$$u^{(1)} = u - 2B.$$

Таким образом (2.5) обобщает гармонический осциллятор на случай  $d = 2$ .

Еще интереснее выглядят мультипликативные преобразования, при которых

$$u^{(1)} = (1 - 2\alpha)u,$$

где  $\alpha$  — некоторая вещественная константа. Несложно убедиться, что общий вид потенциала, преобразующегося таким образом, имеет вид

$$u = \alpha(p)\beta(q)\psi^{\frac{2a}{1-a}}, \quad (2.6)$$

причем  $f \equiv \ln \psi$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} = \alpha(p)\beta(q)e^{\frac{2af}{1-a}}. \quad (2.7)$$

Переходя к новой зависимой переменной

$$F = \frac{2af}{1-a} + \ln[\alpha(p)\beta(q)], \quad (2.8)$$

получаем для  $F$  так называемое нелинейное уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} = \frac{2a}{1-a}e^F. \quad (2.9)$$

В гиперболическом случае общее решение (2.9) при  $a \in (0, 1)$  записывается в виде

$$F(p, q) = \ln \left[ \frac{(1-a)A'(p)B'(q)}{a(A(p)+B(q))^2} \right], \quad (2.10)$$

где  $A(p), B(q)$  — произвольные, вещественные, кусочно трижды непрерывно дифференцируемые функции. Окончательно

$$u = e^{F(p,q)}, \quad (2.11)$$

причем  $F(p,q)$  определяется формулой (2.10).

В заключение отметим, что в эллиптическом случае преобразования Мутара допускают красивую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим исходное уравнение:

$$\Delta \varphi^{(0)} + u^{(0)}\varphi^{(0)} = 0. \quad (2.12)$$

Пусть  $\chi^{(0)}$  решение неоднородного уравнения Лапласа  $\Delta \chi^{(0)} = u^{(0)}$ . Используя  $\chi^{(0)}$ , можно определить некоторую поверхность с конформной метрикой  $g^{(0)}$  и гауссовой кривизной  $K^{(0)}$ :

$$g^{(0)} \equiv e^{\left[ \frac{\chi^{(0)}}{2} \right]}, \quad K^{(0)} = \frac{\Delta \chi^{(0)}}{g^{(0)}}. \quad (2.13)$$

В свою очередь, функция  $g = \varphi^{(0)}$  определяет метрику на другой поверхности с кривизной

$$K = 2 \frac{\Delta \ln \varphi^{(0)}}{\varphi^{(0)}}. \quad (2.14)$$

Тогда преобразование Мутара задает новую поверхность с метрикой  $g^{(0)}$  и гауссовой кривизной  $K^{(1)}$ , вычисляемыми по формулам

$$g^{(1)} = gg^{(0)}, \quad K^{(1)} = \frac{K}{g^{(0)}} + \frac{K^0}{g}. \quad (2.15)$$

В этом смысле формулы (2.2)—(2.3) генерируют конформное преобразование.

На втором шаге выбираем опорную функцию  $\varphi^{(1)}$  за  $g_1$ . Получаем

$$g^{(2)} = g^{(0)} gg_1, \quad K^{(2)} = \frac{K_1}{gg^{(0)}} + \frac{K}{g^{(0)}g_1} + \frac{K^0}{gg_1} \quad (2.16)$$

и т. д.

### Заключение

Мы исследовали метод двумерной факторизации с точки зрения задачи добавления уровня к спектру, тогда как ранее исследовался случай «вычеркивания» уровня. Мы показали, что при решении этой задачи естественным образом возникают преобразования Мутара. Дополнительно мы изучили простейшие форм-инвариантные двумерные потенциалы и дали геометрическую интерпретацию этих симметрий как конформных преобразований в теории двумерных поверхностей.

В дальнейших исследованиях планируется применение этих преобразований в теории двумерных интегрируемых уравнений и, в частности, для изучения двумерных «волн-убийц».

### Список литературы

1. Андрианов А. А., Борисов Н. В., Иоффе М. В. Метод факторизации и преобразование Дарбу для многомерных гамильтонианов // ТМФ. 1984. Т. 61, № 2, С. 183—198.
2. Андрианов А. А., Борисов Н. В., Иоффе М. В., Эйдес М. И. Суперсимметричная механика: новый взгляд на эквивалентность квантовых систем // ТМФ. 1984. Т. 61, № 1. С. 17—28.
3. Андрианов А. А., Борисов Н. В., Иоффе М. В. Теория рассеяния для суперсимметричного гамильтониана и суперсимметрия ядерных взаимодействий // ТМФ. 1987. Т. 72, № 1. С. 97—111.
4. Андрианов А. А., Иоффе М. В., Нишнанидзе Д. Н. Полиномиальная суперсимметрия и динамические симметрии в квантовой механике // ТМФ. 1995. Т. 104, № 3. С. 463—478.
5. Иоффе М. В., Канната Ф., Нишнанидзе Д. Н. Точно решаемая двумерная комплексная модель с вещественным спектром // ТМФ. 2006. Т. 148, № 1. С. 102—111.
6. Иоффе М. В., Колеватова Е. В., Нишнанидзе Д. Н. Некоторые свойства форминвариантной двумерной модели скарфа. Ч. II // ТМФ. 2015. Т. 185, № 1. С. 99—108.

7. *Ioffe M. V.* Supersymmetrical Separation of Variables in Two-Dimensional Quantum Mechanics // SIGMA. 2010. № 6 (075).

8. *Андрианов А. А., Иоффе М. В., Нишнанидзе Д. Н.* Суперсимметрия высших порядков в квантовой механике и интегрируемость двумерных гамильтонианов // Записки науч. семина. ПОМИ. 1995. № 224. С. 68—80.

9. *Yurova A., Yurov A., Yurov V.* The Cauchy problem for the generalized hyperbolic Novikov-Veselov equation via the Moutard symmetries // Symmetry. 2020. Vol. 12 (12). Art. № 2113.

10. *Taimanov I. A.* The Moutard transformation for the Davey-Stewartson II equation and its geometrical meaning // Math. Notes. 2021. № 110 (5). P. 754—766.

11. *Верецагин М. Д., Верецагин С. Д., Юров А. В.* Трехмерное преобразование Мутара // Матем. моделирование. 2006. № 18 (5). С. 111—125.

12. *Kudryavtsev A.* On the twofold Moutard transformation of the stationary Schrödinger equation with axial symmetry. arXiv:2401.16064[math-ph].

### Об авторах

Артур Русланович Максютлов — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.  
E-mail: maksartur@icloud.com

Роман Викторович Чириков — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.  
E-mail: RChirikov1@kantiana.ru

Алла Александровна Юрова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининградский государственный технический университет, Калининград, Россия.  
E-mail: AIUrova@kantiana.ru

### The authors

Artur R. Masyutov, PhD student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.  
E-mail: maksartur@icloud.com

Roman V. Chirikov, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.  
E-mail: RChirikov1@kantiana.ru

Dr Alla A. Yurova, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, Russia.  
E-mail: AIUrova@kantiana.ru

**Г. В. Абраменков, П. А. Дронов, С. Ю. Приданников, А. Н. Нестеренко,  
И. Н. Пятых, О. В. Толстель, Ю. В. Попова, А. А. Кострина, Н. Р. Шилов**

## **НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОРАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЬНЫХ УСТАНОВОК С ТЯГОЙ ОТ 390 ДО 1000 МН**

*Описаны три электроракетные двигательные установки (ЭРДУ) на ксеноне, работающие в диапазоне значений тяги от 390 до 1000 мН. Эти установки имеют потребляемую электрическую мощность от 4,5 до 25 кВт и высокий удельный импульс тяги. Рассмотрена возможность их применения в перспективных космических проектах — орбитальных станциях и лунных грузовых буксирах, имеющих массу до десятков тонн. Приводятся фотографии и 3D-модели внешнего вида двигателей и арматуры установок, значения тяги, удельного импульса тяги, параметров электропитания. Показано возможное расположение этих ЭРДУ в составе космических станций и буксиров. Приводятся данные по срокам и массе доставляемых к Луне грузов. Делаются выводы о целесообразности использования электроракетных двигателей (ЭРД) большой мощности в описанных проектах.*

*The article describes three electric propulsion systems (EPS) using xenon, operating in the thrust range from 390 to 1000 mN. These installations have electrical power consumption from 4.5 to 25 kW and a high specific thrust impulse. The possibility of their use in promising space projects — orbital stations and lunar cargo tugs weighing up to tens of tons — is considered. Photographs and 3D models of the appearance of engines and installation fittings, thrust values, specific thrust impulse, and power supply parameters are provided. The possible location of these electric propulsion systems as part of space stations and tugs is shown. Data are provided on the timing and mass of cargo delivered to the Moon. Conclusions are drawn about the feasibility of using high-power electric propulsion engines (EPE) in the described projects.*

**Ключевые слова:** стационарный плазменный двигатель, двигательная установка, детали и сборочные единицы, ксенон, срок активного существования, тяга, удельный импульс, мощность разряда

**Keywords:** hall thruster, propulsion system, parts and assembly units, xenon, active life, thrust, specific impulse, discharge power

### **Введение**

Рассматриваются конструкции трех двигательных установок (ДУ) на основе ЭРД малой тяги (МТ). Эти ДУ используют стационарные плазменные двигатели (СПД), которые работают на инертном рабочем

---

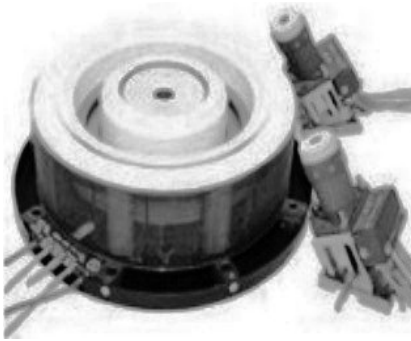
© Абраменков Г. В., Дронов П. А., Приданников С. Ю., Нестеренко А. Н., Пятых И. Н., Толстель О. В., Попова Ю. В., Кострина А. А., Шилов Н. Р., 2024

теле — газе ксенон. ЭРДУ, описанные в первых двух частях, рассматриваются для периодического проведения коррекции орбит околопланетных орбитальных станций. Так, проектируемой Российской орбитальной станции (РОС) вследствие торможения о земную атмосферу будет необходимо периодически поднимать орбиту. Использование для этой цели ЭРДУ с СПД дает преимущества по сравнению с обычной практикой на Международной космической станции (МКС), когда применяются двигатели космических кораблей, пристыкованных к станции в этот момент. Во второй части рассматривается аналогичный проект, но для перспективной окололунной станции. Около Луны нет атмосферы, но есть несферичность ее гравитационного поля и иные факторы, влияющие на орбиту станции. Расходование на это топлива жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) космических кораблей — еще более затратная задача, чем для РОС, так как доставка их до орбиты станции к Луне экономически затратна. Для этой задачи СПД еще более привлекательны. ЭРДУ, описанные в первой и второй частях используют модель двигателя СПД-140, имеющую большую летную историю. В третьей части рассмотрена ЭРДУ на основе перспективного двигателя СПД-230. Предлагается использовать такие ЭРДУ для транспортных задач доставки грузов к Луне. Для предлагаемых ЭРДУ приводятся фотографии, 3D-моздели и электропневмосхемы их составных частей: двигателей, модулей регулирования расхода рабочего тела (МРР), блоков подачи ксенона (БПК), систем хранения и подачи ксенона (СХП) (или блоков хранения ксенона — БХК), систем преобразования и управления подачей питания на двигатель (СПУ), а также данные и характеристики представленного оборудования. Также представлены созданные 3D-модели орбитальной станции и космических буксиров.

### **1. Коррекция орбиты Российской орбитальной станции двигательной установкой на основе СПД-140**

Разработана двигательная установка для коррекции орбиты создаваемой Российской орбитальной станции (РОС) [1]. РОС призвана стать базой отечественной пилотируемой космонавтики, после того как МКС завершит работу. В настоящее время коррекция орбиты МКС производится с помощью ЖРД транспортных кораблей, которые в момент проведения коррекции находятся в ее составе. Для этой цели в год требуется 3600 кг топлива. При использовании ДУ на СПД-140 [2], представленном на рисунке 1, потребуется 364 кг ксенона в год. Также необходимо предусмотреть систему дозаправки.

Масса всей станции составит около 55 т. Станция будет находиться на орбите Земли высотой 300—350 км [3]. Одно из направлений оптимизации компоновки ДУ на КА — применение поворотных механизмов в составе двигательных блоков (ДБ). Поворотные устройства позволяют уменьшить количество двигателей на аппарате и более точно корректировать орбиту в нужном направлении. На КА ведущих западных фирм (MAXAR, Airbus D&S) успешно используются в качестве поворотного устройства многозвеньевые манипуляторы [4].



Параметр	СПД-140
Рабочее тело	Ксенон (Xe)
Напряжение разряда, В	300
Мощность разряда, Вт	4500
Тяга, мН	290
Удельный импульс тяги, с	1750
Ресурс	
- По времени работы, ч	> 19000
- По числу включений	> 9000
Масса, кг	8,5

Рис. 1. Общий вид СПД-140 и его параметры

АО «ОКБ «Факел» имеет опыт в интеграции СПД-140Д/МГР-140 на поворотном устройстве для зарубежного заказчика [5]. ДУ для РОС предлагается с использованием манипулятора с поворотным устройством.

**1.1. Двигательный блок и модули регулирования расхода рабочего тела (МРР-140).**

Было рассчитано, что для коррекции орбиты станции такой массы потребуется одновременная работа двух двигателей СПД-140. Изменение положения центра масс РОС, зависящее от ее текущей конфигурации, требует установки ДУ на манипуляторе. Также был прорисован отсек для БХК. Такая компоновка представлена на рисунке 2.

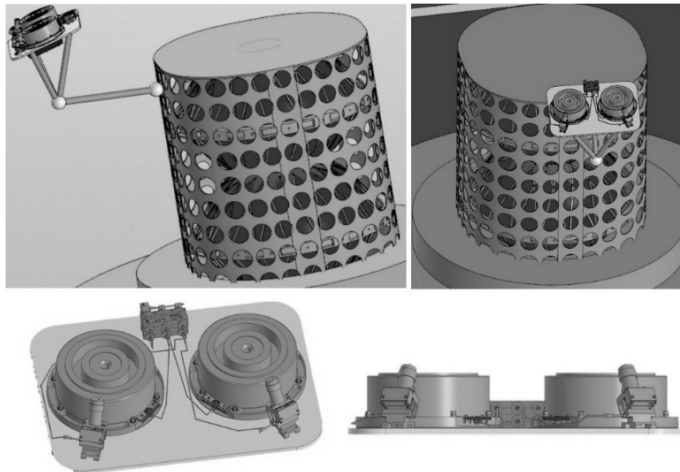


Рис. 2. Общий вид ЭРДУ: манипулятор, отсек с БХК, два СПД-140, МРР-140, межблочные трубопроводы

Каждому двигателю СПД-140 для работы необходим модуль регулирования расхода рабочего тела, выполненный как отдельный узел. На рисунке 2 такие модули обоих СПД-140 собраны в единый блок, нахо-

дящийся между двигателями и соединенный с ними трубопроводами. Ниже, на рисунке 3 слева, показан внешний вид MPP-140, справа показана его пневмосхема.

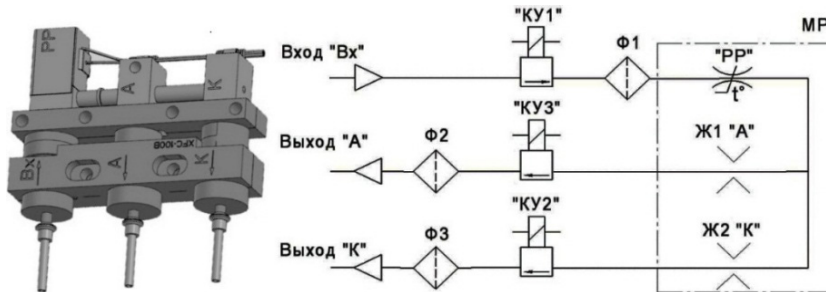


Рис. 3. Внешний вид блока MPP-140 (слева) и его пневмосхема (справа):  
 Ф1, Ф2, Ф3 — фильтры; Ж1, Ж2 — жиклеры; КУ1, КУ2, КУ3 — электромагнитные клапаны; МР — модуль расхода;  
 РР — регулятор расхода

### 1.2. Система хранения рабочего тела и блок подачи ксенона.

Система хранения ксенона состоит из горловины, фермы и баков, представленных на рисунке 4. В проекте использованы композитные баки высокого давления (КБВД), производства компании «Решетнёв» [6]. Бак крепится к силовой конструкции КА посредством «вантовой» системы, изготавливаемой методом намотки из органопластика. «Вантовая» система состоит из 20 или 24 пар спиральных ребер. На перекрестиях ребер расположены элементы крепления, выполненные из углеродной ткани, как показано на рисунке 4. Вместимость бака объемом 350 л — до 570 кг Хе.



Рис. 4. Баки СХП (слева направо): фотография бака, 3D-модель двух баков, модель двух баков внутри фермы

На рисунке 5 представлен внешний вид БПК и его электропневмосхема. Основные параметры БПК: максимальное входное давление — 190 кгс/см<sup>2</sup>; выходное давление — от 2,5 до 2,7 кгс/см<sup>2</sup>; расход рабочего тела (РТ) ≤ 35 мг/с; масса без съемных элементов — 3 кг.

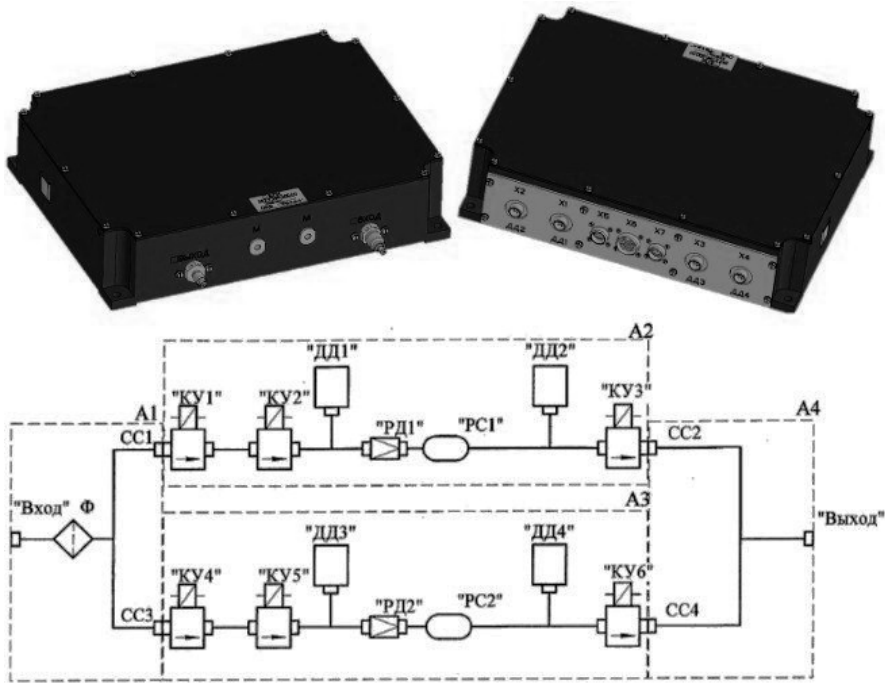


Рис. 5. Вид БПК спереди и сзади (вверху) и его пневмосхема (внизу):  
 Ф — Фильтр; ДД1 — ДД4 — датчики давления; РД1, РД2 — регуляторы давления; РС1, РС2 — ресиверы; КУ1 — КУ6 — клапаны электромагнитные; А1 — трубопровод входной; А2 — магистраль основная; А3 — магистраль резервная; А4 — трубопровод выходной; СС1 — СС4 — соединения сварные

### 1.3. Система питания и управления.

Необходимой частью ЭРДУ является СПУ, преобразующая электрический ток бортовой системы аппарата в ток необходимых силы и напряжения для анода, катода, клапанов, термодросселя и обеспечивающая необходимые временные параметры и логику его подачи. Внешний вид двух вариантов исполнения СПУ показан на рисунке 6.



Рис. 6. Внешний вид некоторых вариантов исполнения блока СПУ

Технические и эксплуатационные характеристики СПУ: управление двигателем СПД-140Д с двумя катодами; напряжение разряда —  $300 \pm 15$  В; выходная мощность — 4,5 кВт; напряжение питания — 100,0 В; масса — 19 кг; габаритные размеры —  $400 \times 440 \times 200$  мм.

## 2. Двигательная установка для поддержания орбиты низкоорбитальной автоматической окололунной станции

Известен проект International Orbital Platform — Gateway на орбите NRHO — гало-орбите около Луны, представленный на рисунке 7 [7].



Рис. 7. Внешний вид международной окололунной станции

Это платформа для освоения Луны и отработки пилотируемых полетов в глубокий космос. Есть проект чисто окололунной орбитальной станции (ОЛС) на низкой круговой окололунной орбите (LLO) высотой 200 км [8]. Его преимущество в том, что взлетно-посадочные комплексы, отправляемые с борта ОЛС с LLO на поверхность Луны и обратно, могут доставлять в 1,5 раза больше полезного груза, чем с орбиты NRHO. Несферичность гравитационного поля Луны, возмущения от Солнца и Земли приводят к торможению станции и необходимости поднимать ее орбиту, сообщая в год приращение характеристической скорости 75 м/с. В [9] представлен проект такой станции, изображенной на рисунке 8.

Проект предусматривает наращивание полной массы станции до 100 т за 12 лет [9]. Первые годы станция используется как хаб только для беспилотных миссий и имеет массу до 26 т. В этот период корректировка орбиты будет осуществляться ДУ на основе СПД-140, установленной на ЭДМ1 (элементы ОЛС — 11 и 1 на рис. 8).

Ниже показана ДУ для конфигурации станции на этом этапе. Была создана упрощенная 3D-модель части ОЛС, представленная на рисунке 9. Она содержит часть модулей, представленных на рисунке 8, в том числе ЭДМ1 с ДУ (на рисунке — слева сверху).

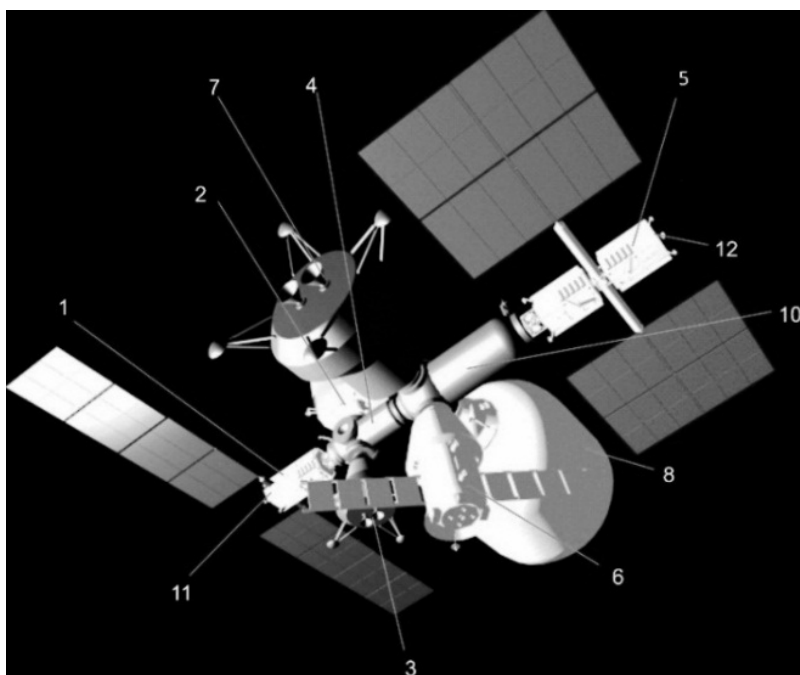


Рис. 8. Проект ОЛС на низкой круговой окололунной орбите LLO:  
1, 5 — энергодвигательные модули ЭДМ1, ЭДМ2; 2 — танкер-заправщик;  
3, 7 — взлетно-посадочные комплексы; 4 — узловой модуль для беспилотных миссий; 6 — корабль «Орел»; 8 — специальный модуль; 10 — узловой модуль для пилотных миссий; 11, 12 — СПД-140 и 230

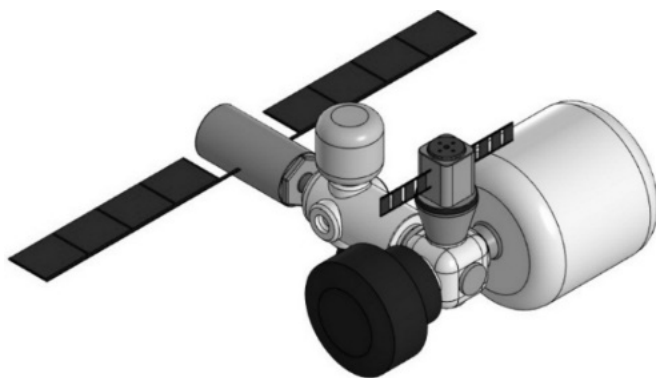


Рис. 9. Внешний вид 3D-модели части станции

Для поддержания станции на выбранной орбите требуется работа ЭРД, обеспечивающего ОЛС с массой  $M_{\text{олс}} = 26$  т и приращением характеристической скорости  $v_{\text{год}} = 72$  м/с. Планируемый срок активного существования (САС) ЭДМ1 принимается за 12 лет [8]. Для ЭРДУ был выбран СПД-140 с тягой  $P = 0,28$ Н и расходом ксенона  $\dot{m}_{\Sigma} = 16$  мг/с.

Результаты расчетов приведены в таблице.

Рассчитываемая величина	Формула	Результат
Суммарный импульс тяги	$I_{\Sigma} = M_{\text{олс}} \cdot v_{\text{год}}$	22 464 кН · с
Требуемое время работы двигателя СПД-140 за весь САС	$\tau_{\text{раб}}^{\Sigma} = \frac{I_{\Sigma}}{P}$	22 286 ч
Требуемое время работы двигателя СПД-140 за 1 год	$\tau_{\text{раб}}^{\text{год}} = \frac{I_{\Sigma}}{P \cdot \text{САС}} = \frac{\tau_{\text{раб}}^{\Sigma}}{\text{САС}}$	1857 ч
Необходимая масса ксенона	$M_{\text{РТ}} = \frac{M_{\text{РТ}}' \cdot I_{\Sigma}}{P} = M_{\text{РТ}}' \cdot \tau_{\text{раб}}^{\Sigma}$	1284 кг
Единичное время работы двигателя за 1 виток орбиты	$T = \frac{\pi}{\sqrt{k}} (R_{\text{л}} + h)^{3/2}$	1,06 ч

Так же, как и в первой части статьи, используется устройство управления вектором тяги двигателя, поскольку изменяется положение центра масс станции вследствие состыковки с ней дополнительных модулей, имеющих другую конструкцию.

### 2.1. Двигательный блок ЭРДУ ОЛС.

В АО «ОКБ «Факел» в сотрудничестве с фирмой RUAG (Швейцария) разработаны интегрированные двигательные блоки (Integrated Thruster Unit), в частности ITU-140, содержащий СПД-140 [5].

Двигательный блок ITU-140 (рис. 10) состоит из модуля ориентации двигателя (МОД) и двигательной системы, которая, в свою очередь, включает в себя двигатель СПД-140, два модуля регулирования расхода (см. рис. 4), трубопроводы и электрические кабели. Работа такого двигательного блока показана на рисунке 11.



Рис. 10. Общий вид ITU-140

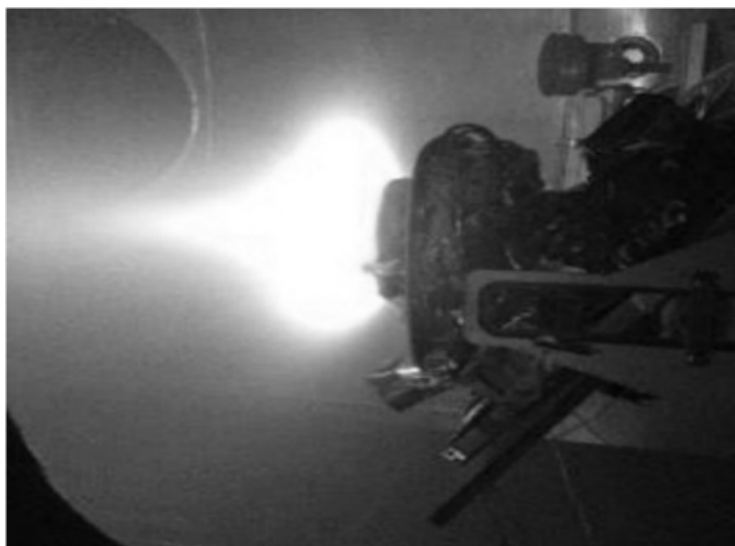


Рис. 11. Работа ИТУ-140 с одновременным действием МОД

## **2.2. Состав ЭРДУ ОЛС.**

Общий вид ЭРДУ ОЛС представлен на рисунке 12. В верхней части — ИТУ-140, под ней — система подачи (СП), ниже — два КБВД [6] внутри силовой конструкции крепления.



Рис. 12. Общий вид конструкции ЭРДУ

На рисунке 13 представлена полная электропневматическая принципиальная схема ЭРДУ.

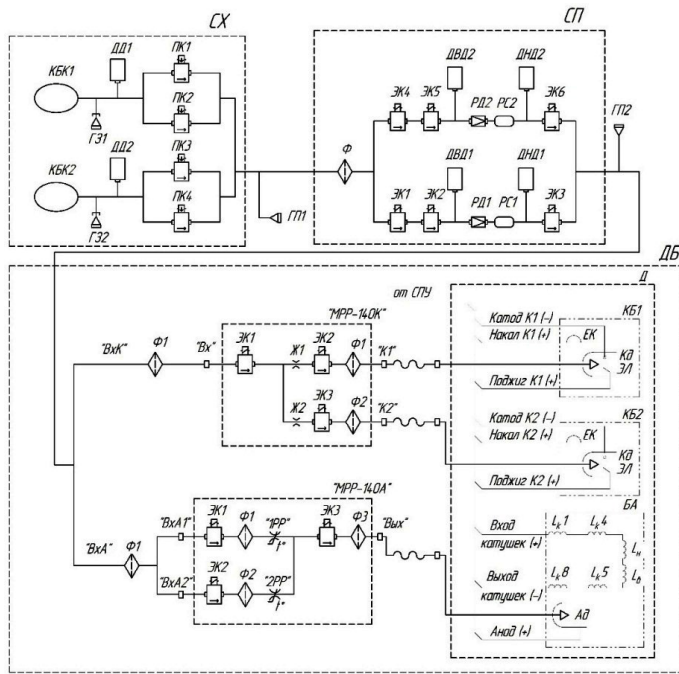
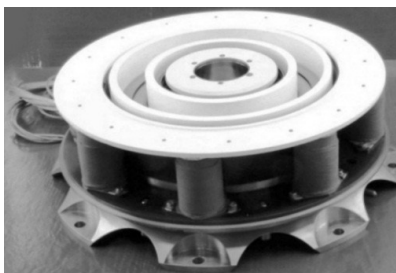


Рис. 13. Электропневматическая принципиальная схема ЭРДУ: СХ — система хранения; КБК — композитный бак ксеноновый, ГЗ — горловина заправочная, ДД — датчик давления, ПК — пусковой пироклапан, ГП — горловина проверочная; СП — система подачи: Ф — фильтр, ЭК — электроклапан, ДВД — датчик высокого давления, ДНД — датчик низкого давления, РД — редуктор давления, РС — ресивер; ДБ — двигательный блок: Д — двигатель (СПД-140), БА — блок анодный, Ад — анод,  $L_6$  — катушка,  $L_n$  — катушка-магнитопровод,  $L_k 1-L_k 8$  — катушка, БК — блок катодный, Кд — катод, ЕК — спираль, Эл — электрод, Ф — фильтр-штуцер, Ж — жиклер, РР — регулятор расхода

### 3. Проектирование космического буксира на основе СПД-230

Далее рассматриваются примеры создания ЭРДУ на основе СПД-230 [2]. На рисунке 14 слева представлен его внешний вид, а в таблице справа приведены параметры.



Параметр	СПД-230
Рабочее тело	Ксенон (Xe)
Напряжение разряда, В	до 800
Ток разряда, А	до 25
Мощность разряда, кВт	до 25
Тяга, мН	до 1070
Удельный импульс тяги, с	до 3200
Ресурс, ч	> 10000
Масса, кг	25
Габаритные размеры, мм	500*410*130

Рис. 14. Внешний вид и параметры СПД-230

### 3.1. Проект «Зевс».

Проект космического буксира «Зевс» с ядерной энергетической установкой (ЯЭУ) и ЭРД [9] имеет массу 55 т: 35 т — тяговый энергетический модуль (ТЭМ) и 20 т — модуль полезной нагрузки (МПН). ЯЭУ в составе ТЭМ имеет мощность 500 кВт, из них до 450 кВт будут потребляться МПН, в основном ЭРДУ. Предполагается облет «Зевсом» Луны, Венеры и спутника Юпитера. На рисунке 15 представлена структура «Зевса», слева направо расположены три части ТЭМ, МПН и блок начального довыведения (доставки) БД.



Рис. 15. Общая схема ядерного буксира

Прорабатываемый вариант буксира на базе СПД-230 для миссии к Луне должен перемещать с низкой околоземной орбиты на орбиту Луны полезную нагрузку массой до 10 т не более чем за 200 суток. В верхней части рисунка 16 представлено изображение такого варианта в соответствии с [10]. Правее фермы с баками на кольцевом фланце установлены 22 СПД-230. Исходя из известных размеров фланца и двигателей была построена приблизительная 3D-модель всего аппарата, представленная в нижней части рисунка 16.

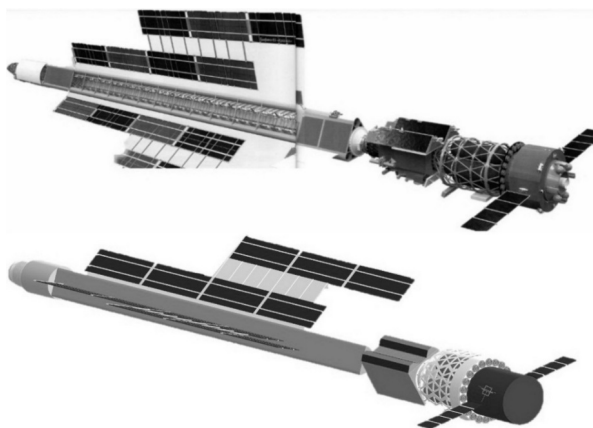


Рис. 16. Вид картинка буксира на основе СПД-230 для миссии к Луне (вверху) и построенная 3D-модель (внизу)

На рисунке 17 укрупненно показаны составные части 3D-модели — СПД-230, ферма с баками и 22 двигателями.

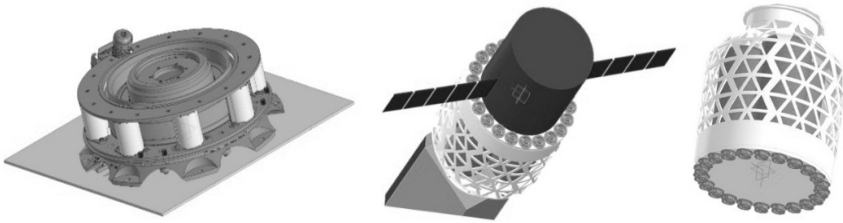


Рис. 17. Части 3D-модели: СПД-230, ферма с баками и двигателями

В составе такой ЭРДУ планируются двигатель СПД-230, модули регулирования расхода (МРР) катода МРР-140К и анода МРР-230А, комплект межблочных трубопроводов, баки, БПК, СПУ-230, ферма. На рисунке 18 представлена электропневмосхема части ЭРДУ, соответствующая одному двигателю СПД-230.

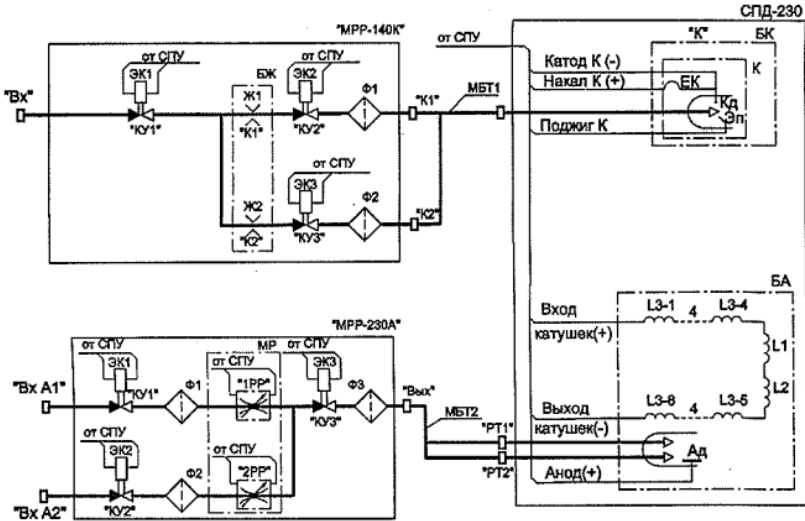


Рис. 18. Электропневмосхема фрагмента ДУ

СПД-230 имеет МРР катода и анода, представленные на рисунках 19 и 20 соответственно (слева — 3D-модели, справа — электропневмосхемы).

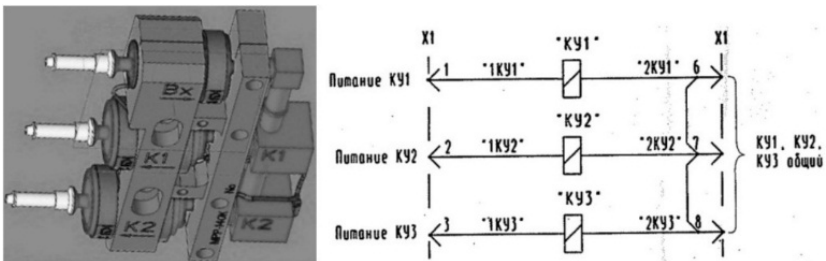


Рис. 19. Катодный МРР-140К: КУ1, КУ2, КУ3 — клапаны

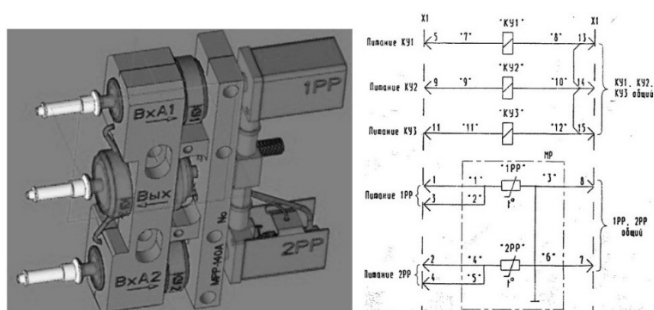


Рис. 20. Анодный МРР-230А: КУ1, КУ2, КУ3 — клапаны, МР — модуль расхода, 1РР, 2РР — регуляторы расхода

Основные параметры и характеристики МРР-230А: габаритные размеры —  $175 \times 148 \times 34$  мм; масса без съемных элементов —  $0,32 \pm 0,03$  кг; максимальное входное давление — 270 кПа.

Вид блока подачи ксенона (БПК) представлен на рисунке 21.

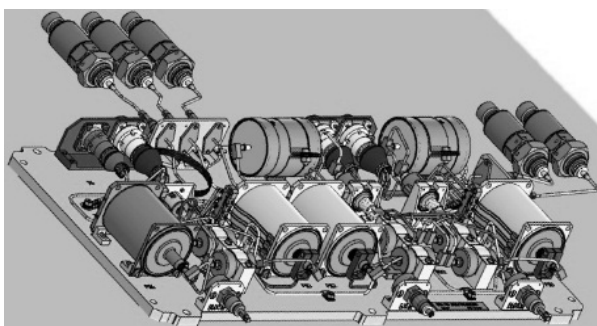


Рис. 21. Вид БПК

Основные параметры и характеристики БПК: масса — 5,3 кг; давление РТ на входе: от 0,59 до 18,6 Мпа (от 6 до 190 кгс/см<sup>2</sup>); расход рабочего тела — на выходе А до 70 мг/с, на выходе К до 1,1 мг/с.

Блок хранения ксенона (БХК), представленный на рисунке 22, прорисован приблизительно, как ажурная силовая конструкция с баками неопределенной марки.

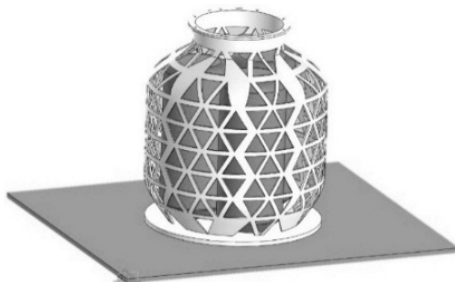


Рис. 22. Модель БХК

Исходя из расхода ксенона 22 штуками СПД-230 и времени работы 200 суток, получены следующие приблизительные параметры БХК: габаритные размеры —  $\text{Ø}923 \text{ мм} \times 2736 \text{ мм}$ , объем баллонов —  $18 \text{ м}^3$ ; масса ксенона —  $29\,310 \text{ кг}$ .

Суммарная тяга 22 СПД-230 при работе в режиме максимального напряжения разряда  $800 \text{ В}$  и максимального удельного импульса  $3200 \text{ с}$  составит около  $14 \text{ Н}$ . По предварительным оценкам, перелет такого варианта «Зевса» с околоземной орбиты высотой  $900 \text{ км}$  до окололунной орбиты высотой  $200 \text{ км}$  с доставкой  $10 \text{ т}$  полезной нагрузки потребует  $230 \text{ дней}$  и  $14 \text{ т}$  ксенона.

### **3.2. Легкий лунный буксир.**

Дальние миссии буксира с ЯЭУ (к Марсу, астероидам, спутникам Юпитера) целесообразны с использованием ионных двигателей при удельном импульсе тяги до  $7000 \text{ с}$ . Учет дополнительных обстоятельств:

1. Доставка элементов буксира с ЯЭУ на орбиту планируется за два запуска тяжелой ракеты-носителя «Ангара-А5», то есть станет принципиально возможной лишь через несколько лет.

2. Летные испытания частей ядерного реактора и перспективных ионных двигателей потребуют длительных сроков.

3. Цена тяги ДУ ядерного буксира снижается необходимостью перемещать массу  $35 \text{ т}$  ТЭМ.

4. При перелетах только от Земли к Луне и обратно буксир находится в области с высоким значением солнечного потока на панели солнечных батарей (СБ).

5. Освоение Луны в ближайшие годы потребует значительного грузопотока от Земли к Луне. Грузы, не требующие быстрой доставки, экономически эффективно доставлять с малой тягой по энергетически выгодным орбитам.

Из указанных обстоятельств следует целесообразность создания легкого лунного буксира (по сравнению с тяжелым буксиром массой  $55 \text{ т}$  с ЯЭУ) с несколькими СПД-230 на солнечной энергетике для перелетов от Земли к Луне.

На рисунке 23 дан вид такого буксира («лунного парома»). Виды слева — с СБ и модулем полезной нагрузки и управления белого цвета внизу; справа — крупно ферма СХП с КБВД [6]. Справа вверху — над фермой фланец с 3 СПД-230. Низ фермы серого цвета — арматурный отсек с БПК и СПУ, максимально удаленный от тепловых потоков от двигателей.

Масса БК без топливных баков — не более  $1030 \text{ кг}$ ; габариты БК —  $\text{Ø}1151 \times 2843$ ; суммарный расчетный импульс тяги двигателя —  $55 \text{ МН} \cdot \text{с}$ ; средний расчетный удельный импульс тяги двигателя — не менее  $3300 \text{ с}$ ; номинальное значение тяги двигателя при номинальных напряжении и токе разряда —  $640 \text{ мН}$ ; габаритные размеры БХК —  $\text{Ø}923 \text{ мм} \times 2736 \text{ мм}$ ; масса незаправленного БХК и теплоизоляции —  $192 \text{ кг}$ ; объем четырех КБВД —  $1,4 \text{ м}^3$ .

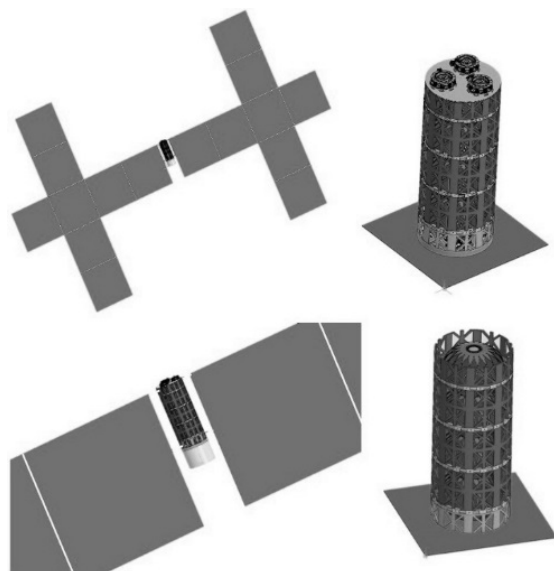


Рис. 23. Легкий лунный буксир: слева — общие виды с панелями солнечных батарей и модулем полезной нагрузки и управления; справа — ферма с двигателями, СХП и арматурным отсеком

Баллистические расчеты [11] показали, что за 143 дня буксир сможет доставить от околоземной орбиты до окололунной 1437 кг полезной нагрузки, потратив 1649 кг ксенона. При возрастании срока доставки эффективность увеличивается: за 278 дней буксир сможет доставить 4586 кг полезной нагрузки, потратив 3211 кг ксенона.

Отработка создания и испытания легкого лунного буксира станет промежуточной ступенью создания многодвигательных буксиров с ЯЭУ.

### Заключение

За последние 7 лет произведен запуск 28 КА со 113 СПД-140 в основном для задач довыведения тяжелых спутников. На основе СПД-140 выполняется самая далекая на сегодня миссия к астероиду Психея [12]. Многократно подтвержденная надежность и успешность СПД большого класса позволяет рассматривать их применение для новых перспективных задач освоения космоса.

### Список литературы

1. *Национальная орбитальная космическая станция*. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Национальная\\_орбитальная\\_космическая\\_станция](https://ru.wikipedia.org/wiki/Национальная_орбитальная_космическая_станция) (дата обращения: 09.05.2024).
2. *Производство* // АО «ОКБ «Факел» : [официальный сайт]. URL: <https://fakel-russia.com/produkcija> (дата обращения: 18.03.2024).
3. *Роскосмос утвердил эскизный проект перспективной Российской орбитальной станции*. URL: <https://tass.ru/kosmos/20422949> (дата обращения: 09.05.2024).

4. *Corey R. L., Pidgeon D. J.* Electric Propulsion at Space Systems/Loral // 31<sup>st</sup> International Electric Propulsion Conference. Ann Arbor, 2009.

5. *Абраменков Г. В., Вертаков Н. М., Дронов П. А. и др.* Ракетные двигатели АО «ОКБ «Факел» для космических аппаратов — опыт летного применения и новые разработки // Космическая техника и технологии. 2023. № 4 (43). С. 13—30.

6. *Ермошкин Ю. М., Житник Ю. Н., Ладыгин А. П.* Разработка в АО «ИСС» оборудования для хранения и подачи рабочего тела электрореактивных двигательных подсистем КА // Решетневские чтения : материалы XIX междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 55-летию Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та им. акад. М. Ф. Решетнева : в 2 ч. Красноярск, 2015. Ч. 1.

7. *International Space Station.* URL: <https://en.n.wikipedia.org> (дата обращения: 23.05.2024).

8. *Сапрыкин О. А.* Новые подходы к проектированию лунной станции для обслуживания автоматических и пилотируемых космических аппаратов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2021. № 9 (738). С. 86—96.

9. *Nesterenko A., Kosmodemyanskyi E., Pridannikov S. et al.* Propulsion system for automated lunar orbital station // AIP Conference Proceedings. 20 July. 2023. Vol. 2549, iss. 1. <https://doi.org/10.1063/5.0114023>.

10. *Ядерный буксир «Зевс» (Нуклон) в 2023 году защищен аванпроект.* 22.08.2023. URL: [dzen.ru/a/ZOS7bQ9MtzZnhX8E](https://dzen.ru/a/ZOS7bQ9MtzZnhX8E) (дата обращения: 23.05.2024).

11. *Афанасьев И.* Буксир ложится на курс // Русский космос. 2022. № 04 (38). С. 10—15.

12. *Широбоков М. Г., Суслов К. С., Овчинников М. Ю. и др.* Анализ траекторий легкого лунного буксира с электрореактивной двигательной установкой // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2024. № 28. С. 1—23.

13. *Зонд Psyche переходит на крейсерскую скорость в 200 тысяч км/ч.* URL: <https://prokosmos.ru/2024/05/23/zond-psyche-perekhodit-na-kreiserskuyu-skorost-v-200-tisyach-kmch> (дата обращения: 23.05.2024).

### Об авторах

Геннадий Владимирович Абраменков — директор, АО «ОКБ «Факел», Россия.

E-mail: [abramenkovgv@fakel-russia.com](mailto:abramenkovgv@fakel-russia.com)

Павел Александрович Дронов — гл. конструктор, канд. техн. наук, АО «ОКБ «Факел», Россия.

E-mail: [dronov.pa@fakel-russia.com](mailto:dronov.pa@fakel-russia.com)

Сергей Юрьевич Приданников — зам. гл. конструктора, канд. техн. наук, АО «ОКБ «Факел», Россия.

E-mail: [Pridannikov@fakel-russia.com](mailto:Pridannikov@fakel-russia.com)

Александр Никитович Нестеренко — ведущий науч. сотр., канд. техн. наук, АО «ОКБ «Факел», Россия.

E-mail: [Nesterenko@fakel-russia.com](mailto:Nesterenko@fakel-russia.com)

Игорь Николаевич Пятых — нач. сектора, АО «ОКБ «Факел», Россия.

E-mail: [Pyatih@fakel-russia.com](mailto:Pyatih@fakel-russia.com)

Олег Владимирович Толстель — доц., канд. техн. наук, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: tolstel.oleg@mail.ru

Юлия Васильевна Попова — магистрант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: popova.jv@fakel-russia.com

Алена Андреевна Кострина — магистрант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: blueraven27rzqalg@gmail.com

Николай Романович Шилов — магистрант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: nikolayshilov@mail.ru

### The authors

Gennady V. Abramenzov, Director, JSC OKB Fakel, Russia.

E-mail: abramenzovgv@fakel-russia.com

Dr Pavel A. Dronov, Chief Designer, JSC OKB Fakel, Russia.

E-mail: dronov.pa@fakel-russia.com

Dr Sergey Yu. Pridannikov, Deputy Chief Designer, JSC OKB Fakel, Russia.

E-mail: Pridannikov@fakel-russia.com

Dr Alexander N. Nesterenko, Leading Researcher, JSC OKB Fakel, Russia.

E-mail: Nesterenko@fakel-russia.com

Dr Igor N. Pyatih, Head of Sector, JSC OKB Fakel, Russia.

E-mail: Pyatih@fakel-russia.com

Dr Oleg V. Tolstel, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: tolstel.oleg@mail.ru

Julia V. Popova, Master's student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: popova.jv@fakel-russia.com

Alena A. Kostrina, Master's student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: blueraven27rzqalg@gmail.com

Nikolai R. Shilov, Master's student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: nikolayshilov@mail.ru

**А. А. Персичкин, В. А. Персичкин, А. А. Шпилевой**

**О ВОЗМОЖНОСТИ СИНТЕЗА КАНАЛА ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ  
В ПЭМИН ВИДЕОИНТЕРФЕЙСОВ ИЗМЕНЕНИЕМ ЧАСТОТЫ  
КАДРОВОЙ РАЗВЕРТКИ**

*Представлены теоретическое обоснование и практическое доказательство варианта образования канала информационной утечки за счет наличия побочных электромагнитных излучений и наводок (ПЭМИН) в видеоинтерфейсах компьютерных систем. Базовой величиной, объединяющей частотные параметры ПЭМИН и программно-аппаратные средства видеоинтерфейсов, служит частота смены пикселей монитора, в связи с чем предлагается выполнять внешний контроль параметров излучений путем управления ее значением. По причине высокой интенсивности сигналов ПЭМИН и их потенциальной информативности видеоинтерфейс компьютера должен быть обязательным объектом контроля. Управление частотой в эксперименте реализовано штатными средствами используемой операционной системы. В качестве контрольного параметра выбран сигнал тактовой частоты HDMI видеоинтерфейса. Как показали проведенные измерения, даже малое изменение частоты кадровой развертки четко обнаруживается измерительной системой в исследуемом диапазоне радиочастот. Используемая измерительная установка построена на базе SDR-приемника, снабженного внешней приемной антенной. Полученные результаты подтверждают теоретическое предположение о возможности передачи информации компьютерной системы в сигнале ПЭМИН видеоинтерфейса посредством модуляции частоты кадровой развертки.*

*This paper presents a theoretical justification and practical proof of the option of forming an information leakage channel due to the presence of side electromagnetic radiation and interference (PEMIN) in video interfaces of computer systems. The basic value combining the frequency parameters of the PEMIN and the software and hardware of video interfaces is the frequency of changing monitor pixels, in connection with which it is proposed to perform external control of radiation parameters by controlling its value. Due to the high intensity of the PEMIN signals and their potential informativeness, the computer's video interface should be a mandatory object of control. Frequency control in the experiment is implemented using the standard tools of the operating system used. The clock frequency signal of the HDMI video interface is selected as a control parameter. As the measurements have shown, even a small change in the frame rate is clearly detected by the measuring system in the studied rang. The measuring device used is based on an SDR receiver equipped with an exter-*

*nal receiving antenna. The results obtained confirm the theoretical assumption about the possibility of transmitting information from a computer system in the signal of a PEMIN video interface by modulating the frame rate.*

**Ключевые слова:** видеоинтерфейс, ПЭМИН, информационная безопасность, антенная система, кадровая развертка

**Keywords:** video interface, TEMPEST, information security, antenna system, frame rate

Исследование компьютерных систем на предмет наличия побочных электромагнитных излучений и наводок (ПЭМИН) как продуктов штатного функционирования любой компьютерной системы является одним из актуальных направлений информационной безопасности, объединяющим вопросы как защиты информации от технических каналов утечки (ТКУИ), таких как радиоперехват, перехват через электрическую сеть, включая заземляющий кабель источника электропитания и т. п., так и защиты от различных видов несанкционированного доступа (НСД) [1; 2].

По причине высокой интенсивности сигналов ПЭМИН и их потенциальной информативности видеоинтерфейс компьютера выступает обязательным объектом контроля. Фактически его можно рассматривать как программно-управляемый широкополосный радиопередатчик, электромагнитные сигналы которого могут регистрироваться на расстоянии. Базовой величиной, объединяющей частотные параметры ПЭМИН и программно-аппаратные средства видеоинтерфейсов, является частота смены пикселей (pixel clock) монитора [3], определяемая формулой

$$F_p = L \times H \times F_{\text{кадр}} \times k, \quad (1)$$

где  $L$  — число пикселей в строке;  $H$  — количество строк;  $F_{\text{кадр}}$  — частота кадровой развертки (частота обновления экрана);  $k$  — постоянный коэффициент. Частота  $F_{\text{кадр}} = 60 \div 75$  Гц достаточна для стандартных задач офисной работы, домашнего использования компьютера, онлайн-общения и серфинга в сети.

Информационное наполнение ПЭМИН видеоинтерфейса основано на изменении интенсивности сигнала яркости пикселей, а его аналитическое описание может быть достаточно компактно реализовано преимущественно для простых статичных изображений на экране монитора. Например, изображение в виде чередования пикселей с минимальной и максимальной яркостью с достаточной точностью интерпретируется и согласуется с результатами измерений как последовательность прямоугольных импульсов с частотой, равной половине значения  $F_p$  (рис. 1) [4].

Учитывая, что ПЭМИН видеоинтерфейса является побочным продуктом нормально функционирующей компьютерной системы, целесообразно проанализировать возможность внешнего воздействия на переменные величины в выражении (1), при котором функционирование системы не выйдет за рамки штатного режима, но станет возможным внешний контроль отдельных параметров сигнала ПЭМИН.

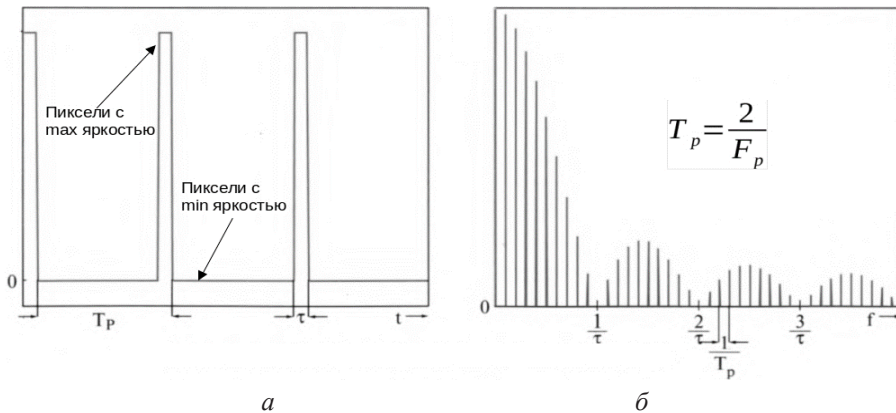


Рис. 1. Стандартная импульсная последовательность (а) и ее частотный спектр, соответствующий изменению яркости пикселей монитора (б)

На основании относительно простого анализа можно сделать вывод, что переменные  $L$  и  $H$  в данной задаче можно не рассматривать, поскольку произведение  $L \times H$  представляет собой разрешение экрана и вариации этих величин могут привести к заметным искажениям изображения. Из анализа также исключается  $k$  — константа, определяемая конструктивными параметрами системы.

Рассмотрим более подробно процесс формирования кадровой развертки монитора. Наиболее распространенное значение частоты  $F_{\text{кадр}}$  составляет 60 Гц, что сложилось исторически — в ходе эволюции систем телевидения в видеоинтерфейсы (первые системы телевидения использовали для генерации частоты кадровой развертки сеть электропитания, частота которой в США составляет 60 Гц). С другой стороны, выбор значения  $F_{\text{кадр}}$  является компромиссом между физиологией человеческого зрения и возможностями радиотехнической системы. Одну из особенностей зрительного восприятия человека составляет его инерционность, выражающаяся в том, что при частоте смены кадров более 50 Гц человек перестает ощущать связанное с этим процессом мерцание экрана монитора [5].

Исходя из указанной особенности, можно предположить, что искусственное изменение  $F_{\text{кадр}}$  в сторону ее увеличения свыше 50 Гц не будет воспринято визуально, однако дистанционно обнаружится в пределах радиодиапазона специализированной аппаратурой анализа ПЭМИН [6], в качестве которой могут использоваться автоматизированные измерительные комплексы «Сигурд», «Стентор-Мини», «Легенда», «Дистанция», «Навигатор-ПЗГ» и др.

Для исследования возможности реализации указанного воздействия проведен эксперимент по дистанционному анализу ПЭМИН видеоинтерфейса с возможностью программного управления частотой кадровой развертки. Управление частотой  $F_{\text{кадр}}$  в эксперименте реализовано штатными средствами операционной системы, а именно при помощи опции

«Настройки параметров экрана». Основная трудность данной процедуры заключалась в том, что большинство доступных мониторов поддерживают в требуемом диапазоне только одну частоту,  $F_{\text{кадр}} = 60$  Гц, и не допускают ее перестройку таким путем. Выходом из ситуации стало использование устройства видеовоспроизведения Samsung 6 Series, которое в режиме монитора позволяет в окне настройки параметров экрана задавать нужные оригинальные значения частоты кадровой развертки, в частности частоты обновления 60 Гц, 59,94 Гц (рис. 2). Отметим, что столь незначительная разница между значениями  $F_{\text{кадр}}$  вызывает дополнительный интерес к результатам измерений.

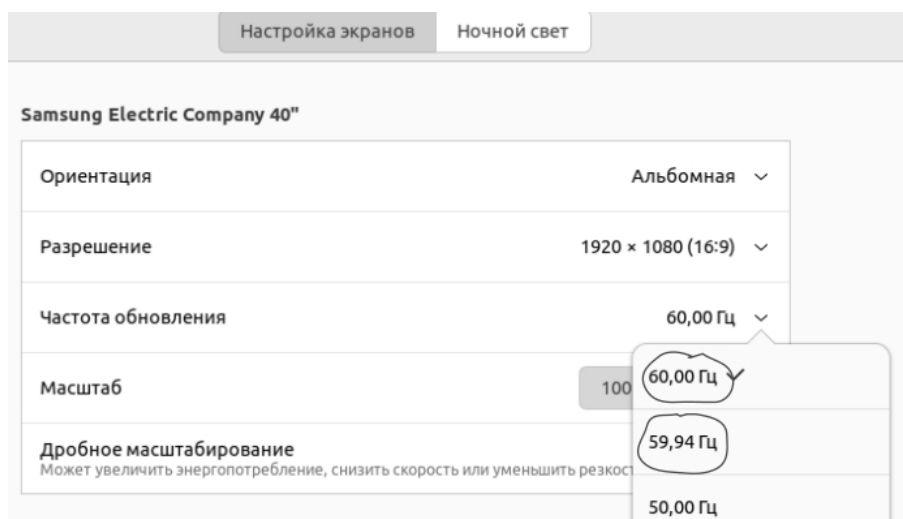


Рис. 2. Интерфейс приложения настройки параметров Samsung 6 Series в режиме монитора

В качестве контрольного параметра в эксперименте выбран сигнал тактовой частоты HDMI видеоинтерфейса, значение которой составляет  $\sim 1500$  МГц [6]. Используемая измерительная установка построена на базе SDR-приемника (Software-defined radio) с управляющим программным обеспечением [7; 8] и внешней антенной системой. Внешний вид измерительной системы представлен на рисунке 3. Антенна изготовлена на диапазон частот, соответствующий излучению тактовых сигналов HDMI видеоинтерфейса, и представляет собой полуволновой диполь, снабженный уголковым рефлектором с углом раскрыва  $\alpha = 60^\circ$  [9]. Его расчет выполнялся из следующих соображений: длина стороны рефлектора  $L$  определяется расстоянием  $S$  между вибратором и вершиной отражателя, а также углом раскрыва  $\alpha$  [10]. В результате волна, падающая в определенную точку А рефлектора, после отражения будет распространяться строго параллельно его оси, при учете что для угла  $\alpha = 60^\circ$  указанная точка будет располагаться на расстоянии  $1,73 S$  от вершины рефлектора. Расстояние от вибратора до исследуемого объекта в нашем случае составляло 1 м.



Рис. 3. Измерительная система для оценки сигнала ПЭМИН тактовой частоты видеointерфейса HDMI

Результаты, полученные в ходе эксперимента, можно трактовать следующим образом.

Как и предполагалось, изменение  $F_{\text{кадр}}$  экспериментального видеointерфейса от 60 Гц до 59,94 Гц практически не отразилось на зрительном восприятии изображения оператором компьютера (стоит пояснить, что оценка визуального ощущения проводилась в отношении реакции зрения на частоту смены кадров, а не на появляющееся при изменении  $F_{\text{кадр}}$  на мониторе окно с сервисным сообщением системы).

Совершенно другая ситуация наблюдалась на измерительной установке. Частота ПЭМИН, которая при  $F_{\text{кадр}} = 60$  Гц составляла 1484,972 МГц, при ее изменении на 59,94 Гц уменьшилась до 1483,493 МГц. Таким образом, разница частот ПЭМИН составила 1,481 МГц, и даже малое изменение частоты кадровой развертки на 0,06 Гц было четко обнаружено измерительной системой в исследуемом диапазоне радиочастот (рис. 4), что полностью подтвердило наши первоначальные предположения.

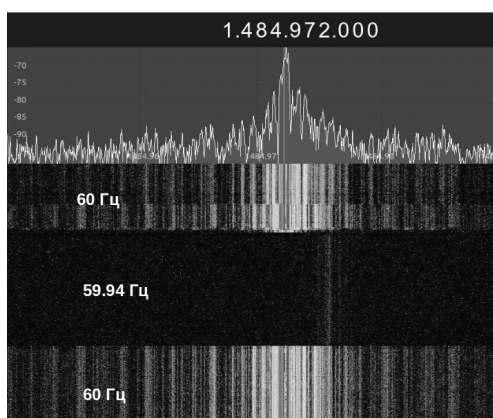


Рис. 4. Изображение исследуемого сигнала ПЭМИН видеointерфейса в управляющем окне программного обеспечения SDR-приемника.

Верхняя часть — спектр сигнала, нижняя часть — развертка спектра по времени («водопад»)

Полученные результаты также позволяют сделать вывод о возможности передачи информации с компьютерной системы в сигнале ПЭМИН видеоинтерфейса, которая может быть реализована программно, посредством частотной модуляции  $F_{\text{кадр}}$ . Передаваемая информация напрямую кодируется в виде цифровой последовательности, логические уровни которой соответствуют двум близким частотам кадровой развертки.

Как следствие, приходим к выводу о том, что исследованные особенности формирования сигнала ПЭМИН в видеоинтерфейсах также могут послужить основой синтеза гибридного канала утечки информации в защищаемых компьютерных системах, который реализуется внедрением стороннего программного обеспечения с функцией модуляции частоты кадровой развертки несанкционированно полученной защищаемой информацией. Другой особенностью данного канала утечки информации является то, что в случае его реализации могут быть скомпрометированы некоторые системы защиты, основанные на анализе сетевого трафика, так как передача информации происходит средствами, не связанными с сетевым оборудованием.

#### Список литературы

1. *Хорев А. А.* Оценка возможности перехвата побочных электромагнитных излучений видеосистемы компьютера. Ч. 1 // Специальная техника. 2011. № 3. С. 48—61.
2. *Хорев А. А.* Оценка возможности перехвата побочных электромагнитных излучений видеосистемы компьютера. Ч. 2 // Специальная техника. 2011. № 4. С. 51—62.
3. *Гук М.* Аппаратные интерфейсы ПК : энциклопедия. СПб., 2002.
4. *Раушер К., Нансен Ф., Минихольд Р.* Основы спектрального анализа. М., 2006.
5. *Мамчев Г. В.* Основы радиосвязи и телевидения : учеб. пособие для вузов. М., 2007.
6. *Шпилевой А. А., Персичкин А. А.* О возможности аналитического обнаружения сигнала ПЭМИН в видеоинтерфейсах HDMI // Вестник БФУ им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2022. № 1. С. 34—39.
7. *Асыев Г. Д., Антясов И. С., Уфимцев М. С.* Исследование побочных электромагнитных излучений монитора с помощью RTL-SDR приемника // Вестник УрФО. 2019. № 4 (34). С. 15—21.
8. *Персичкин А. А., Хватов Д. А., Шпилевой А. А.* Методика обработки результатов экспертной оценки угроз безопасности информации // Вестник БФУ им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2021. № 3. С. 39—42.
9. *Ротхаймель К.* Антенны. М., 1966.
10. *Пониматкин В. Е., Шпилевой А. А.* Электромагнитные поля и волны в системах связи : учеб. пособие. Калининград, 2015.

#### Об авторах

Андрей Андреевич Персичкин — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: persichkinaa@mail.ru

Виталий Андреевич Персичкин — студ., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: [circiav@proton.me](mailto:circiav@proton.me)

Андрей Алексеевич Шpileвой — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: [AShpilevoi@kantiana.ru](mailto:AShpilevoi@kantiana.ru)

### **The authors**

Andrey A. Persichkin, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: [persichkinaa@mail.ru](mailto:persichkinaa@mail.ru)

Vitaliy A. Persichkin, Student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: [circiav@proton.me](mailto:circiav@proton.me)

Dr Andrey A. Shpilevoi, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: [AShpilevoi@kantiana.ru](mailto:AShpilevoi@kantiana.ru)

**М. П. Савченко**

**ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СПУТНИКОВОЙ ЛИНИИ СВЯЗИ  
ПРИ БОКОВОМ ПРИЕМЕ**

*При работе антенны одновременно с несколькими спутниками сигналы приходят с разных направлений. Для спутников, не попавших в главный лепесток диаграммы направленности антенны (ДН), прием является боковым. При боковом приеме меняется не только положение точек фокуса, в которых должны располагаться малошумящие блоки, но и коэффициент усиления антенны, который определяет добротность приемной системы и в конечном итоге отношение несущая / шум (C/N). На основе Рекомендации МСЭ-R ВО.1696 в работе получено соотношение для расчета C/N, учитывающее в явном виде снижение коэффициента усиления антенны при отклонении луча от центрального направления и снижение коэффициента использования поверхности антенны. При отклонении спутников от направления центрального лепестка ДН по азимуту до  $\pm 10^\circ$  изменением эффективной площади антенны и вызванным этим снижением C/N можно пренебречь. Отклонение на  $\pm 27^\circ$  по азимуту снижает C/N на 0,5 дБ и на 1,0 дБ при отклонении на  $\pm 37^\circ$ .*

*When the antenna works simultaneously with several satellites, the signals come from different directions. For satellites that do not fall into the main lobe of the antenna pattern (RP), the reception is lateral. With lateral reception, not only the position of the focus points, in which low-noise blocks should be located, changes, but also the antenna gain, which determines the quality factor of the receiving system and, ultimately, the carrier-to-noise ratio (C/N). Based on Recommendation ITU-R VO.1696, a relation for calculating C/N is obtained in the work, which explicitly takes into account the decrease in the antenna gain when the beam deviates from the central direction and the decrease in the coefficient of use of the antenna surface. When the satellites deviate from the direction of the central lobe of the RP in azimuth up to  $\pm 10^\circ$ , the change in the effective area of the antenna and the resulting decrease in C/N can be neglected. A deviation of  $\pm 27^\circ$  in azimuth reduces C/N by 0.5 dB and by 1.0 dB for a deviation of  $\pm 37^\circ$ .*

**Ключевые слова:** спутниковая связь, радиолиния «космический аппарат — станция», энергетический расчет радиолинии, многолучевая антенна типа «один облучатель — один луч», добротность приемной системы?

**Keywords:** satellite communication, radio link “space craft-station”, energy calculation of a radio link, multipath antenna of the type “one irradiator — one beam”, Q-factor of the receiving system

Для трансляции высококачественного телевизионного изображения по наземным каналам связи необходимо обеспечить прием спутникового сигнала с определенным отношением несущая / шум ( $C/N$ ). Методика расчета  $C/N$  для случая «один спутник — одна антенна» хорошо известна и приведена в рекомендациях МСЭ [1]. В методике предусматривается точная настройка антенны на спутник с целью получения максимального отношения  $C/N$  (центральный прием). При работе антенны одновременно с несколькими спутниками сигналы приходят с разных направлений. Для спутников, не попавших в главный лепесток диаграммы направленности антенны (ДН), прием является боковым. При боковом приеме меняется не только положение точек фокуса, в которых должны располагаться малошумящие блоки (LNB), но и коэффициент усиления антенны, который определяет отношение  $C/N$ .

**Цель** настоящей работы — предложить простой способ учета изменения энергетического потенциала спутниковой линии радиосвязи при боковом приеме.

Воспользуемся методологией, изложенной в рекомендациях МСЭ [1], и приведем основные расчетные соотношения.

**Уравнение для энергетического потенциала радиолинии:**

$$C/N = EIRP - L_s - BW_{eff} - k \div C/T_g - Z_1 - A_p(p) - dT(p), \text{ дБ}, \quad (1)$$

где  $EIRP$  — эффективная изотропная излучаемая мощность (ЭИИМ) со спутника в месте приема сигнала, дБВт;

$L_s$  — затухание в свободном пространстве, дБ;

$BW_{eff}$  — эффективная ширина полосы частот шума, дБ/Гц;

$k$  — постоянная Больцмана, дБ;

$C/T_g$  — добротность приемной системы в условиях ясного неба, включая только воздействие газового поглощения, дБ/К;

$Z_1$  — коэффициент настройки (дБ) для искажения транспондера спутника;

$A_p(p)$  — дополнительное затухание радиосигнала в атмосфере, превышаемое  $p$  % времени, дБ;

$dT(p)$  — увеличение шумовой температуры среды из-за рассеяния сигнала в дожде и облачности, превышаемое  $p$  % времени, дБ/К.

$p$  — процент времени, используемого для определения целевой готовности линии связи.

Рассмотрим входящие в уравнение (1) слагаемые.

$EIRP$  является характеристикой спутника. Числовое значение  $EIRP$  в месте размещения приемной станции определяется по карте покрытия спутника.

Коэффициент настройки для искажения транспондера спутника  $Z_1$  также является технической характеристикой спутника. Типовое значение для цифровых систем:  $Z_1 = 0$  дБ.

Затухание в свободном пространстве определяется соотношением [2]

$$L_s = 20 \lg \left[ \frac{4\pi d}{\lambda} \right], \text{ дБ}, \quad (2)$$

где  $d$  — длина трассы от передающей антенны спутника до приемной антенны земной станции, м;  $\lambda$  — длина волны, м.

Эффективная ширина полосы частот шума приемной системы  $BW_{eff}$  равна полосе частот канала связи  $BW$  [2]. Для цифрового сигнала в качестве  $BW$  может быть взята полоса сигнала  $BW \approx SR(1 \div r)$ , где  $SR$  — символьная скорость, симв/с;  $r$  — коэффициент скругления спектра (Rolloff).

$$BW_{eff} = 10 \cdot \lg(BW), \text{ дБ/Гц.} \quad (3)$$

Постоянная Больцмана  $k_b = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Вт/Гц/°К,  $k = 101 \text{ г} k_b = -228,6$  дБ.

Добротность приемной системы  $Q = G/T_g$ , где  $G$  — коэффициент усиления приемной антенны,  $T_g$  — температура приемной системы в условиях ясного неба, включая только воздействие газового поглощения без затухания из-за дождя и облачности [3].

Первые шесть компонентов в уравнении (1) определяют отношение мощности несущей к мощности шума в условиях ясного неба:

$$(C/N)_{CS} = EIRP - L_s - BW_{eff} - k \div C/T_g - Z_1. \quad (4)$$

Два последних компонента в (1) определяют уровень ослабления в дожде, не превышаемый для  $p$  % времени:

$$A = A_p(p) \div dT(p). \quad (5)$$

Расчет этих составляющих определяется Рекомендациями МСЭ-R [4—7].

В уравнении (1) взаимное расположение передающей и приемной станций характеризуют два параметра — расстояние  $d$  между антеннами и угол места  $\beta$ . При работе с геостационарными спутниками их можно найти по выражениям (6) и (7) соответственно [2]:

$$d = 6378,16 \cdot \sqrt{m^2 + 1 - 2m \cdot \cos \vartheta \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \text{ км;} \quad (6)$$

$$\beta = \arctg \left\{ \frac{\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \cos \vartheta - 0,151}{\sqrt{1 - \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \cos^2 \vartheta}} \right\}, \text{ град.} \quad (7)$$

Здесь  $m = 6,61$  — отношение радиуса геостационарной орбиты к радиусу Земли;  $\varphi_1$  — долгота места приема;  $\varphi_2$  — долгота спутника;  $\vartheta$  — географическая широта места приема.

Для настройки приемной антенны на спутник помимо угла места необходимо знать азимут [2]:

$$\alpha = 180 - \arctg \left\{ \frac{\text{tg}(\phi_2 - \phi_1)}{\sin \vartheta} \right\}, \text{ град.} \quad (8)$$

При переходе от центрального приема к боковому путем поворота антенны трасса радиосигнала не меняется, меняется положение антенны относительно направления на спутник. Анализ выражений (1)—(8) показывает, что в этом случае измениться может только один компонент — добротность приемной системы.

### Добротность приемной системы при боковом приеме.

Предположим, что антенна сначала была настроена на спутник СП1 и имела азимут  $\alpha_1$  и угол места  $\beta_1$ , а затем была перенацелена на спутник СП2 с  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ . Изменение положения антенны в пространстве составило

$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$  и  $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ . В первом случае осуществлялся центральный прием спутника СП1, во втором — СП2. Расположив соответствующим образом на антенне дополнительный конвертор, можно одновременно с сигналом спутника СП2 вести боковой прием сигнала СП1. В этом случае сигнал СП2 принимается центральным лепестком диаграммы направленности антенны, а СП1 — отклоненным лепестком. Назовем спутник СП2 основным, а СП1 — боковым соответственно (рис. 1).

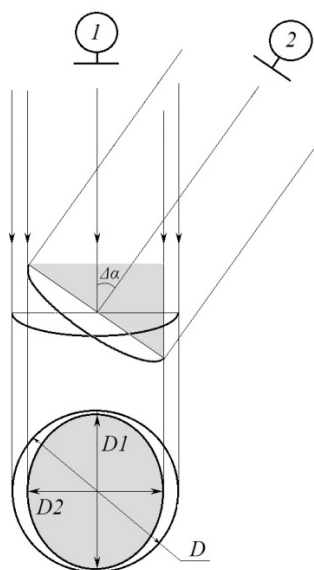


Рис. 1. Центральный и боковой прием спутника

Антенна с несколькими установленными в фокальной плоскости облучателями может рассматриваться как многолучевая антенна типа «один облучатель — один луч» [8]. Известно [9], что при отклонении луча от его центрального направления происходит изменение формы ДН, рост боковых лепестков и снижение усиления. Снижение усиления  $GL$  определяется конструкцией антенны и зависит от величины угла отклонения луча от центрального направления. Например, для осесимметричных параболических антенн максимальный угол, на который можно отклонить ДН от оси зеркала без заметных искажений, приблизительно равен удвоенной ширине ДН на уровне 0,5 по мощности [10], то есть составляет единицы градусов. В то же время тороидальная зеркальная антенна [11] позволяет работать со спутниками в радиусе до  $60^\circ$  при значениях  $GL \leq 0,45$  дБ. Итак, с учетом поворота ДН коэффициент усиления антенны в отклоненном лепестке составит

$$G_{откл} = G - GL, \text{ дБ}, \quad (9)$$

где  $G$  — коэффициент усиления антенны в главном лепестке ДН (центральный прием).

При боковом приеме меняется также и эффективная площадь антенны. Допустим, что при центральном приеме раскрыв антенны представ-

ляет круг диаметром  $D$  (рис. 1). После перенацеливания антенны на СП2 раскрыв в направлении СП1 примет форму эллипса с диаметрами  $D1$  и  $D2$ , причем

$$D1 = D \cdot \cos\Delta\beta, \quad (10)$$

$$D2 = D \cdot \cos\Delta\alpha. \quad (11)$$

Запишем коэффициент усиления приемной антенны в виде [2]:

$$G = (4\pi/\lambda^2) \cdot S_{\text{эфф}}, \quad (12)$$

где  $S_{\text{эфф}}$  — эффективная площадь приемной антенны. Данная величина определяется геометрической площадью раскрыва  $S_{\text{ГМ}}$  и коэффициентом использования поверхности антенны  $k_{\text{ИП}} \leq 1$ .

Для центрального приема  $S_{\text{эфф}}$  (круглый раскрыв)

$$S_{\text{ИП}} = \frac{\pi D^2}{4} k_{\text{ИП}}. \quad (13)$$

Для бокового приема, с учетом (10), (11),  $S_{\text{эфф}}$  (эллипсный раскрыв)

$$S_{\text{БОК}} = \frac{\pi D1 D2}{4} k_{\text{ИП}} = \frac{\pi D^2}{4} k_{\text{ИП}} \cdot \cos\Delta\alpha \cdot \cos\Delta\beta. \quad (14)$$

Введем обозначение

$$k_{\Delta} = \cos\Delta\alpha \cdot \cos\Delta\beta. \quad (15)$$

Используя выражения (13)—(15), получим следующее соотношение:

$$S_{\text{БОК}} = \frac{\pi D^2}{4} k_{\text{ИП}} \cdot k_{\Delta} = S_{\text{ИП}} \cdot k_{\Delta}. \quad (16)$$

Множитель  $k_{\Delta} \leq 1$  можно рассматривать как «угловой» компонент коэффициента использования геометрической поверхности антенны при боковом приеме:

$$k_{\text{ИПУГЛ}} = k_{\text{ИП}} \cdot k_{\Delta}. \quad (17)$$

Подставив (13) и (16) в (12), получим следующую связь между коэффициентами усиления антенны при боковом и центральном приеме:

$$G_{\text{БОК}} = G \cdot k_{\Delta}. \quad (18)$$

Перейдем к температуре приемной системы  $T_g$  в условиях ясного неба. Принимая во внимание, что между облучателем и МШУ (LNB) антенно-волноводный тракт отсутствует, в соответствии с [9] запишем:

$$T_g = T_A \div T_{\text{LNB}}/\eta_{\text{LNB}}, \quad (19)$$

где  $T_A$  — эквивалентная шумовая температура антенны, К;  $T_{\text{LNB}}$  — эквивалентная шумовая температура LNB, К;  $\eta_{\text{LNB}}$  — коэффициент эффективности облучателя, отображающий точность установки конвертора в точке фокуса антенны и соответствие ширины диаграммы направленности облучателя размеру зеркала. Числовые значения  $\eta_{\text{LNB}}$  могут находиться в интервале 0,85—0,95 [12].

Эквивалентная шумовая температура LNB связана с коэффициентом шума  $NF$  соотношением

$$T_{LNB} = 290 \cdot (10^{0,1NF} - 1), \text{°K.} \quad (20)$$

Эквивалентная шумовая температура антенны  $T_A$  учитывает множество факторов [2]: шумовую температуру атмосферы, шумовую температуру теплового излучения Земли, шумовую температуру космического излучения и др. Методика расчета  $T_A$  достаточно трудоемка, она подробно изложена в [12; 13]. На практике хорошее приближение дает эмпирическое соотношение, учитывающее угол места  $\beta$  в градусах и диаметр антенны  $D$  в метрах [14]:

$$T_A = 15 + \frac{30}{D} + \frac{180}{\beta}. \quad (21)$$

Подставив (21) в (19), получим:

$$T_g = 15 + \frac{30}{D} + \frac{180}{\beta} + \frac{T_{LNB}}{\eta_{LNB}}. \quad (22)$$

Выражение (22) характеризует шумовую температуру системы в случае прямой настройки на спутник (центральный прием). Здесь  $D$  — диаметр круглого раскрыва. При повороте антенны трасса сигнала со спутника СП1 не меняется, значит,  $\beta$  сохраняет свое значение. Изменяется эффективная площадь антенны. Для эллиптического раскрыва введем эквивалентный диаметр  $D_{ЭKB}$ , при котором площадь круга равна площади эллипса с диаметрами  $D1$  (10) и  $D2$  (11):

$$D_{ЭKB} = \sqrt{D1 \cdot D2} = D \cdot \sqrt{k_\Delta}. \quad (23)$$

Для бокового приема (22) примет вид

$$T_{g\text{БOK}} = 15 + \frac{30}{D_{ЭKB}} + \frac{180}{\beta} + \frac{T_{LNB}}{\eta_{LNB}}. \quad (24)$$

Угловой коэффициент  $k_\Delta \leq 1$ , например, при сдвиге по азимуту  $\Delta\alpha = 50^\circ$  и  $\Delta\beta = 10^\circ$  имеет значение  $k_\Delta = 0,64$ , соответственно,  $(k_\Delta)^{1/2} \approx 0,8$ . Это позволяет для достаточно широкого диапазона углов поворота антенны считать величину  $\varepsilon = 1 - (k_\Delta)^{1/2}$  малой и представить (24) в следующем виде:

$$T_{g\text{БOK}} = 15 + \frac{30}{D(1-\varepsilon)} + \frac{180}{\beta} + \frac{T_{LNB}}{\eta_{LNB}} \approx T_g + \frac{30}{D} \varepsilon = T_g(1+\nu), \quad (25)$$

где  $\nu = \frac{30}{D} \varepsilon / T_g$  — величина еще более малая, чем  $\varepsilon$ .

С учетом выражения (18) добротность приемной станции при боковом приеме примет вид:

$$\frac{G_{\text{БOK}}}{T_{g\text{БOK}}} = \frac{G \cdot k_\Delta}{T_g(1+\nu)} = \frac{G}{T_g} \cdot \frac{k_\Delta}{(1+\nu)} = \frac{G}{T_g} \cdot \Delta Q, \quad (26)$$

где  $G/T_g$  — добротность станции при центральном приеме, как и в выражении (1);

$$\Delta Q = k_\Delta \cdot \left[ 1 + \frac{30}{D} (1 - \sqrt{k_\Delta}) / T_g \right]^{-1} \quad (27)$$

— поправка на добротность станции при боковом приеме,  $\Delta Q \leq 1$ .

В итоге для энергетического расчета спутниковой линии связи при боковом приеме получим выражение (28), отличающееся от (1) наличием компонентов  $GL$  и  $\Delta Q$ , снижающих  $C/N$ :

$$C/N = EIRP - L_s - BW_{eff} - k \div G/T_g - Z_1 - A_p(p) - dT(p) - GL \div \Delta Q, \text{ дБ.} \quad (28)$$

Определим область возможных значений поправки  $\Delta Q$ .

**Расчет спутниковой линии связи.**

Для оценки вклада, вносимого в энергетический потенциал поправкой  $\Delta Q$ , выполнен расчет линий цифровой радиосвязи с несколькими спутниками. Результаты расчета и список спутников приведены в таблице 1. Расчет проводился для случая ясного неба по выражению (29), полученному из (28), для обобщенного транспондера, характеристики которого приведены в таблице 2, и приемной установки с параметрами, указанными в таблице 3, расположенной в точке  $54^\circ 50'$  с. ш.,  $20^\circ 35'$  в. д. без учета  $GL$  ( $GL \equiv 0$ ).

$$C/N = EIRP - L_s - BW_{eff} - k \div G/T_g \div \Delta Q. \quad (29)$$

В качестве основного спутника выбран спутник Astra1C в позиции 19E2, находящийся практически на долготе приемной станции. В таблице 1 значения величин  $G/T_g$  и  $(C/N)_{CS}$  вычислены для случая центрального приема спутников, затем к ним применялась поправка  $\Delta Q$ , и в итоге получены значения  $(C/N)_{бок}$ . Для основного спутника центральный и боковой приемы совпадают.

Таблица 1

**Результаты расчета спутниковой линии связи**

Спутник	Astra1C 19E2	Astra3B 23E5	Astra2A 28E2	Экспресс АМУ1 36E	Europe- Star1 45E	Экспресс АТ1 56E	ABS-2 74E9	
$\alpha$ , град	181,7	176,4	170,7	161,4	151,0	139,0	120,3	
$\beta$ , град	27,44	27,39	27,07	25,90	23,67	19,81	11,04	
$\Delta\alpha$ , град	0	-5,3	-11,0	-20,3	-30,7	-42,7	-61,4	
$\Delta\beta$ , град	0	-0,05	-0,37	-1,54	-3,77	-7,63	-16,4	
$k_{\Delta}$ , дБ	0	-0,02	-0,08	-0,28	-0,66	-1,38	-3,38	
$D = 60$ см	$T_g$ , К	86,76	86,77	86,85	87,15	87,80	89,29	96,50
	$G/T_g$ , дБ	15,53	15,53	15,52	15,51	15,49	15,44	15,11
	$(C/N)_{CS}$ , дБ	12,68	12,72	12,74	12,78	12,79	12,76	12,38
	$\Delta Q$ , дБ	0	-0,02	-0,10	-0,36	-0,84	-1,73	-4,04
	$C/N_{бок}$ , дБ	12,68	12,70	12,64	12,42	11,95	11,03	8,34

Окончание табл. 1

Спутник		Astra1C 19E2	Astra3B 23E5	Astra2A 28E2	Экспресс АМУ1 36E	Europe- Star1 45E	Экспресс АТ1 56E	ABS-2 74E9
$D = 90$ см	$T_g$ , К	70,07	70,07	70,15	70,45	71,10	72,59	79,80
	$G/T_g$ , дБ	20,04	20,04	20,04	20,02	19,99	19,91	19,55
	$(C/N)_{CS}$ , дБ	17,20	17,23	17,27	17,29	17,30	17,24	16,81
	$\Delta Q$ , дБ	0	-0,02	-0,10	-0,34	-0,81	-1,66	-3,92
	$C/N_{\text{бок}}$ , дБ	17,20	17,21	17,17	16,95	16,49	15,58	12,89
$D = 180$ см	$T_g$ , К	53,43	53,44	53,52	53,82	54,47	55,96	63,17
	$G/T_g$ , дБ	27,13	27,13	27,07	27,07	27,00	26,94	26,52
	$(C/N)_{CS}$ , дБ	24,29	24,32	24,29	24,34	24,31	24,26	23,78
	$\Delta Q$ , дБ	0	-0,02	-0,09	-0,32	-0,77	-1,56	-3,73
	$C/N_{\text{бок}}$ , дБ	24,29	24,30	24,20	24,02	23,54	22,70	20,05

Таблица 2

## Характеристики обобщенного транспондера

ЭИИМ, дБВт	Частота, МГц	Стандарт	SR, ксимв/с	FEC	Rolloff	Полоса, МГц
50	11 700	DVB-S/S2	27 500	3/4	0,35	37,12

Таблица 3

## Характеристики приемной установки

Антенна офсетная					
Диаметр, см	Фокусное расстояние, см	Частотный диапазон, ГГц	Коэффициент усиления, дБ	Ширина луча, град	КИП, %
60	38,4	10,7—12,75	35,5	2,8	66
90 (88)	58,3	10,7—12,75	39,2	2,1	72
180	103,5	10,7—12,75	45,1	1,0	70
Конвертер					
Поляриза- ция	Коэффици- ент шума, дБ	Рабочие частоты, ГГц	Коэффициент усиления, дБ	Частота гетеродина, ГГц	Стабиль- ность
Линейная	0,2	10,7—12,75	56—60	9,75/10,6	$\pm 1$ МГц

По данным в таблицы 1 на рисунке 2 построены графики. Линия 1 устанавливает связь между сдвигом спутника относительно основного по долготе  $\Delta\varphi = \varphi_{2\text{осн}} - \varphi_{2\text{бок}}$  и сдвигом  $\Delta\alpha$  по азимуту. Линия 2 отображает зависимость  $k_{\Delta}$  от  $\Delta\alpha$ , линия 3 — от  $\Delta Q$  для антенны диаметром 90 см. График для антенны  $D = 60$  см, как следует из таблицы 1, должен прохо-

дуть ниже линии 3, а для  $D = 180$  см — выше линии 3, то есть с ростом диаметра зеркала поправка  $\Delta Q$  уменьшается и приближается к значениям  $k_{\Delta}$ .

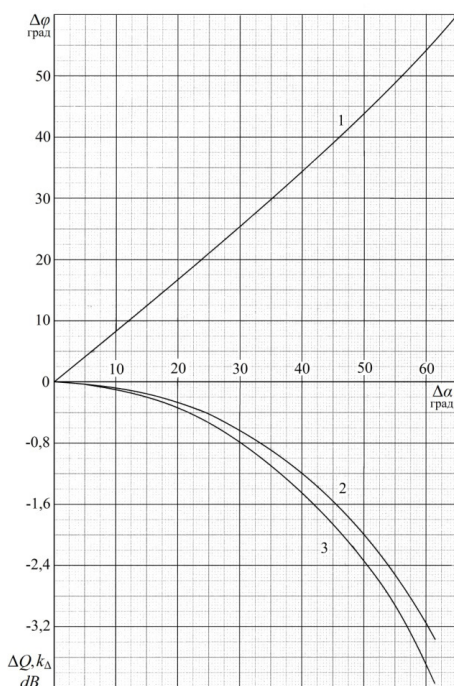


Рис. 2. Графики зависимости  $k_{\Delta}$  (линия 2) и  $\Delta Q$  (линия 3) от углового сдвига спутника по азимуту  $\Delta\alpha$ , линия 1 — связь между сдвигом  $\Delta\alpha$  и сдвигом по долготе от основного спутника  $\Delta\varphi$

Из рисунка 2 и таблицы 1 также следует, что при смещении спутников относительно основного в пределах  $\pm 10^\circ$  по азимуту величина поправки  $\Delta Q$  для всех рассмотренных антенн практически одинаковая, не отличается от  $k_{\Delta}$  и достигает значения  $-0,1$  дБ при  $\Delta\alpha = 10^\circ$ . При  $\Delta\alpha = 20^\circ$  поправка  $\Delta Q$  вырастает до  $-(0,32 \div 0,36)$  дБ и превышает  $k_{\Delta}$  примерно на  $0,05$ — $0,10$  дБ; при  $\Delta\alpha = 30^\circ$  поправка  $\Delta Q$  вырастает до  $-(0,77 \div 0,84)$  дБ и превышает  $k_{\Delta}$  примерно на  $0,11 \div 0,18$  дБ.

Это позволяет сделать вывод, что для офсетных антенн диаметром от 60 до 180 см при расположении боковых спутников в интервале  $\pm 10^\circ$  от основного спутника поправку  $\Delta Q$  можно не учитывать, а для спутников в интервале от  $10^\circ$  до  $30^\circ$  считать  $\Delta Q \approx k_{\Delta}$  с погрешностью  $0,1$ — $0,2$  дБ.

Таким образом, в инженерных расчетах выражение (28) можно упростить, заменив  $\Delta Q$  (27) на  $k_{\Delta}$  (15).

Из рисунка 2 видно, что  $k_{\Delta}$  достигает значения  $0,5$  дБ при смещении спутника относительно основного на углы  $\Delta\alpha$ , равные  $\pm 27^\circ$ , а на  $1$  дБ — при  $\pm 37^\circ$ , или  $\pm 22^\circ$  и  $\pm 32^\circ$  соответственно по долготе.

Для сравнения в таблице 4 приведены расчеты линий связи для тех же спутников, что и в таблице 1, но с выбором в качестве основного спутника Экспресс АМУ1. Результаты подтверждают сделанные выше выводы.

Таблица 4

**Результаты расчета спутниковой линии связи при выборе  
в качестве основного спутника Экспресс АМУ1 36Е**

Спутник	Astra1C 19E2	Astra3B 23E5	Astra2A 28E2	Экспресс АМУ1 36Е	Europe- Star1 45Е	Экспресс АТ1 56Е	ABS-2 74Е9
$\alpha$ , град	181,7	176,4	170,7	161,4	151,0	139,0	120,3
$\beta$ , град	27,44	27,39	27,07	25,90	23,67	19,81	11,04
$\Delta\alpha$ , град	20,3	15	9,3	0	-10,4	-22,4	-31,2
$\Delta\beta$ , град	1,54	1,49	1,17	0	-2,23	-6,09	-14,86
$k_{\Delta}$ , дБ	-0,28	-0,15	-0,06	0	-0,08	-0,37	-0,82
$\Delta Q$ , дБ /60см	-0,36	-0,19	-0,07	0	-0,10	-0,47	-1,03
$\Delta Q$ , дБ /90см	-0,34	-0,18	-0,07	0	-0,09	-0,45	-0,99
$\Delta Q$ , дБ/180см	-0,32	-0,17	-0,07	0	-0,09	-0,42	-0,93

### Заключение

Учитывая вышеизложенное, для практических расчетов спутниковой линии радиосвязи при боковом приеме можно рекомендовать соотношение

$$C/N = EIRP - L_s - BW_{eff} - k \div G/T_g - Z_1 - A_p(p) - dT(p) - GL \div \Delta Q, \text{ дБ. (30)}$$

Соотношение (30) в дополнение к рекомендованному МСЭ [1] соотношению (1) учитывает определяемое конструкцией антенны снижение усиления  $GL$  (9) при отклонении луча от центрального направления и снижение на величину  $k_{\Delta}$  (15) коэффициента использования поверхности антенны (17) вследствие ее поворота. При отклонении спутников от направления центрального лепестка ДН по азимуту в пределах  $\pm 10^\circ$  изменением эффективной площади антенны ( $k_{\Delta}$ ) и вызванным этим снижением  $C/N$  можно пренебречь. Отклонение на  $\pm 27^\circ$  по азимуту вызывает снижение эффективной площади антенны, приводящее к снижению  $C/N$  на 0,5 дБ и на 1,0 дБ при отклонении на  $\pm 37^\circ$ .

### Список литературы

1. *Рекомендация МСЭ-R ВО.1696. Методологии для определения показателей качества по готовности для цифровых систем многопрограммной радиовещательной спутниковой службы и их связанных фидерных линий, работающих в планируемых полосах.* Женева, 2005.
2. *Спутниковая связь и вещание : справочник / под ред. Л. Я. Кантора. М., 1997.*
3. *Рекомендация МСЭ-R ВО.790. Характеристики приемного оборудования и вычисление добротности (G/T) приемника для радиовещательной спутниковой службы.* Женева, 1992.
4. *Рекомендация МСЭ-R. Р.676-6. Затухание в газах.* Женева, 2005.
5. *Рекомендация МСЭ-R. Р.618-13. Данные о распространении радиоволн и методы прогнозирования, необходимые для проектирования систем связи Земля — космос.* Женева, 2017.

6. *Рекомендация МСЭ-Р. Р.838-3. Модель погонного ослабления в дожде, используемая в методах прогнозирования.* Женева, 2005.
7. *Рекомендация МСЭ-Р. Р.839-4. Модель высоты слоя дождя, используемая в методах прогнозирования.* Женева, 2013.
8. *Антилогов В., Шишлов А., Эйдус А. Многолучевые антенные системы HTS // Технологии и средства связи. Специальный выпуск «Спутниковая связь и вещание.* 2014. С. 54—67.
9. *Сомов А. М., Корнев С. Ф. Спутниковые системы связи : учеб. пособие для вузов / под ред. А. М. Сомова. М., 2012.*
10. *Корбанский И. Н. Антенны : учеб. пособие для вузов. М., 1973.*
11. *Installation Manual for Toroidal 90 Multi-beam satellite antenna.* URL: <https://dl-manual.com/doc/manual-antenna-toroidalapdf-9zqy614j94vp> (дата обращения: 03.06.2024).
12. *Липкович Э. Б. Системы и устройства спутникового мультимедийного вещания и интерактивной связи : учеб.-метод. пособие. Минск, 2020.*
13. *Стивенсон Д. Спутниковое ТВ. Практическое руководство / пер. с англ. М., 2001.*
14. *Ерохин Г. А., Мандель В. И., Нестеркин Ю. А., Струков А. П. Методика расчета энергетического запаса радиолинии «космический аппарат — станция» // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2018. Т. 5, вып. 1. С. 65—74.*

#### **Об авторах**

Михаил Петрович Савченко — канд. техн. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия.

E-mail: savchenkomp@mail.ru

#### **The author**

Dr Mikhail .P. Savchenko, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia.

E-mail: savchenkomp@mail.ru

*Научное издание*

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ  
В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Сборник научных трудов

Выпуск 3

*Под редакцией А. Д. Быковой*

Редактор *Д. А. Малеваная*  
Компьютерная верстка *Е. В. Денисенко*

Подписано в печать 13.02.2025 г.  
Дата выхода в свет 25.02.2025 г.  
Формат 70×108 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Усл. печ. л. 10,8  
Тираж 300 экз. (1-й завод 35 экз.). Заказ 22

Издательство Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта  
236041, Россия, Калининград, ул. А. Невского, 14